Corrigé de Centrale 2017 PC math 1

I Nombre de partitions en k parties

I.A Pour former une partition de $[[1,n]]$ en k parties on doit associer à chaque entier de 1 à n l'une des k parties. Il y a donc au maximum k^n partitions.

I.B.1) Il ne peut pas y avoir plus de n parties non vides disjointes pour un ensemble à n éléments donc $S(n,k)=0$ si $k>n$.

I.B.2) Il n'y a qu'une façon de former une seule partie donc $S(n,1)=1$ si $n>0$.

I.C Dénombrons les partitions de $[[1,n]]$ en k parties.

Premier cas: l'une des parties est $\{n\}$. Il reste à former $k-1$ parties avec les éléments de $[[1,n-1]]$ donc $S(n-1,k-1)$ possibilités.

Deuxième cas: n est dans une partie qui n'est pas un singleton. Si on supprime n, on obtient une partition de $[[1,n-1]]$ en k parties. Réciproquement, si on complète une partition de $[[1,n-1]]$ en k parties en ajoutant n à l'une des parties, on obtient une partition de $[[1,n]]$ en k parties telle que n n'est pas dans un singleton. Comme il y a k possibilités pour le choix de la partie à laquelle on ajoute n, le nombre de partitions de $[[1,n]]$ en k parties telles que n n'est pas dans un singleton est égal à $kS(n-1,k)$.

On a donc $S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$.

I.D.1)
```
def S(n,k):
    if n==0 and k==0: return 1
    elif n==0 or k==0: return 0
    else: return S(n-1,k-1)+k*S(n-1,k)
```

I.D.2) Notons $u(n,k)$ le nombre d'opérations pour calculer $S(n,k)$ par cette fonction récursive. Ce nombre vérifie $u(n,k)=u(n-1,k-1)+u(n-1,k)+2\geqslant u(n-1,k-1)+u(n-1,k)$. Comme $u(1,k)=2\geqslant\binom{1}{k}$ on en déduit par récurrence sur n, en utilisant la relation de Pascal, que $u(n,k)\geqslant\binom{n}{k}$.

II Nombres de Bell

II.A Pour une partition de $[[1,n]]$ le nombre de parties peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n. Le nombre total de partitions de $[[1,n]]$ est donc égal à $\sum_{k=0}^{n}S(n,k)$ puisque $S(n,0)=0$ pour $n\geqslant 1$.

II.B Pour former une partition de $[[1,n+1]]$ on peut commencer par choisir la partie contenant $n+1$. Pour cela on doit compléter $\{n+1\}$ par une partie de $[[1,n]]$ qui possède k éléments ($0\leqslant k\leqslant n$). k étant fixé il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une telle partie. Ce choix étant fait, il reste à compléter la partie contenant $n+1$ par une partition des $n-k$ éléments de $[[1,n]]$ qui n'ont pas été choisis: il y a B_{n-k} telles partitions. Pour chaque k entre 0 et n il y a donc $\binom{n}{k}B_{n-k}$ partitions de $[[1,n+1]]$ telles que $n+1$ est dans une partie comportant $k+1$ éléments.

On en déduit que $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$ en changeant k en $n-k$, puisque $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

II.C Montrons par récurrence forte sur n que $B_n\leqslant n!$.

C'est vrai pour $n=0$ et $n=1$ puisque $B_0=B_1=1$.

Supposons $B_k\leqslant k!$ pour $0\leqslant k\leqslant n$. On en déduit avec la formule du II.B:

$$B_{n+1}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\leqslant\sum_{k=0}^{n}n!=(n+1)!.$$

La majoration est vraie pour $n+1$, elle est donc vraie pour tout n.

II.D Puisque la suite $\frac{B_n}{n!}r^n$ est majorée pour $r=1$ on en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n}{n!}z^n$ est au moins égal à 1.

II.E Pour $x \in]-R,R[$ on peut dériver terme à terme la série entière; on obtient $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{B_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_{n+1}}{n!}x^n$ en changeant n en $n+1$.

D'autre part le produit de Cauchy des séries entières de sommes $f(x)$ et e^x donne pour $x \in]-R,R[$:

$e^x f(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k = \frac{B_{n+1}}{n!}$ en utilisant le II.B.

On a donc bien montré $f'(x) = e^x f(x)$.

II.F On en déduit que $f(x) = \lambda e^{e^x}$ avec de plus $f(0) = 1 = \lambda e$ donc $f(x) = e^{e^x - 1}$.

III Une suite de polynômes

III.A La famille $(H_0, ..., H_n)$ est libre puisque les polynômes ont des degrés échelonnés. Tous les polynômes sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et ils sont au nombre de $n+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. La famille est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.B.1) $H_{k+1}(X) = (X-k)H_k(X)$ donc $H_{k+1}(X) + kH_k(X) = XH_k(X)$

III.B.2) Montrons par récurrence sur n que $X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)H_k(X)$.

C'est vrai pour $n=0$ car $S(0,0)=1$ et $H_0(X)=1$.

Supposons la propriété vraie pour n.

$\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)H_k(X) = \sum_{k=1}^{n+1}(S(n,k-1)+kS(n,k))H_k(X)$ en utilisant la relation du I.C.

En posant $k = k'+1$ on obtient $\sum_{k=1}^{n+1} S(n,k-1)H_k(X) = \sum_{k'=0}^{n} S(n,k')H_{k'+1}(X)$. D'autre part $S(n,n+1)=0$.

Par suite $\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)H_k(X) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(H_{k+1}(X)+kH_k(X)) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)XH_k(X)$ en utilisant le III.B.1).

On en déduit avec l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)H_k(X) = X^{n+1}$.

III.C.1) $0 \leqslant S(n,k) \leqslant B_n \leqslant n!$ donc $\frac{S(n,k)}{n!}$ est borné et par suite le rayon de convergence de $(\sum \frac{S(n,k)}{n!}x^n)$ est au moins égal à 1. f_k est donc définie sur $]-1,1[$.

III.C.2) Pour $k \geqslant 1$ on a: $g_k'(x) = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!}e^x = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + kg_k(x)$ en posant $e^x = 1 + (e^x - 1)$.

III.C.3) Montrons par récurrence sur k que $f_k(x) = g_k(x)$ pour $x \in]-1,1[$. C'est vrai pour $k=0$ puisque $g_0(x) = 1 = S(0,0)$ et $S(n,0) = 0$ pour $n \geqslant 1$.

Supposons l'égalité vraie pour $k-1$. Pour $x \in]-1,1[$ on a: $f_k'(x) = \sum_{n\geqslant k} S(n,k)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n'\geqslant k-1} S(n'+1,k)\frac{x^{n'}}{n'!}$ en posant $n = n'+1$.

Avec le I.C on obtient: $f_k'(x) = \sum_{n\geqslant k-1}(S(n,k-1)+kS(n,k))\frac{x^n}{n!}$ d'où $f_k'(x) = g_{k-1}(x) + kf_k(x)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence pour $k-1$ (et $S(k-1,k)=0$).

f_k vérifie donc l'équation différentielle du III.C.2). Comme de plus $f_k(0) = 0 = g_k(0)$ on déduit de l'unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiant une condition initiale (problème de Cauchy) que $f_k = g_k$ sur $]-1,1[$.

III.D.1) Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ donne pour $x \in]-1,1[$:

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\frac{x^k}{k!}$.

III.D.2) $x = e^u - 1 \in]-1,1[\iff u < \ln 2$. On a alors $e^{u\alpha} = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha)\frac{(e^u-1)^k}{k!}$.

IV Fonctions génératrices

IV.A Si $G_Y(t) = \sum_{n\geqslant 0} P(Y=n)t^n$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1 alors on peut dériver m fois au point $t=1$ et obtenir $G_Y^{(m)}(1) = \sum_{n\geqslant m} P(Y=n)n(n-1)...(n-m+1)$. On en déduit par récurrence sur m que $\sum_{n\geqslant 0} P(Y=n)n^m$ converge pour tout entier $m \geqslant 1$.

IV.B.1) $G_Y(t) = \sum_{n\geqslant 0} P(Y=n)t^n$ ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 on peut dériver m fois pour $t \in]-1,1[$: $G_Y^{(m)}(t) = \sum_{n\geqslant m} P(Y=n)n(n-1)...(n-m+1)t^{n-m}$. Par hypothèse les séries $(\sum_{n\geqslant 0} P(Y=n)n^k)$ convergent pour tout $k \geqslant 0$ donc on obtient que la limite de $G_Y^{(m)}(t)$ quand t tend vers 1 (resp -1) existe: G_Y est donc de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

IV.B.2) On obtient $G_Y^{(k)}(1) = \sum_{n\geqslant k} P(Y=n)n(n-1)...(n-k+1) = \sum_{n\geqslant k} P(Y=n)H_k(n)$.

IV.B.3) Donnons un exemple où la fonction génératrice G_Y a un rayon de convergence égal à 1.

Soit $A = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$, série convergente puisque $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$. $G_Y(t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{A}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}t^n$ est une fonction génératrice qui a un rayon de convergence égal à 1: en effet pour $t > 1$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}t^n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}+n\ln t}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, pour tout $m \geqslant 1$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{A}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}n^m$ converge puisque $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}n^m = o(\frac{1}{n^2})$.

IV.C.1) Pour la loi de Poisson de paramètre 1 on a $P(Y=k) = \mathrm{e}^{-1}\frac{1}{k!}$ d'où $G_Y(t) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{-1}\frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^{t-1}$.

$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{-1}\frac{k^n}{k!} = \mathrm{e}^{-1}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n} S(n,j)H_j(k)$ en utilisant le III.B.2).

On en déduit en permutant les deux sigma (chacune des séries converge):

$\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{j=0}^{n} S(n,j)\sum_{k\geqslant 0} H_j(k)P(Y=k)$.

Avec le IV.B.2, $\sum_{k\geqslant 0} H_j(k)P(Y=k) = G_Y^{(j)}(1) = G_Y(1) = 1$. On obtient que $\mathbb{E}(Y^n) = \sum_{j=0}^{n} S(n,j) = B_n$.

IV.C.2) Si $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients entiers on déduit de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^k}{n!} = \mathrm{e}\mathbb{E}(Y^k) = \mathrm{e}B_k$:

$\sum_{n\geqslant 0}\frac{Q(n)}{n!} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{d} a_k B_k$ qui est bien le produit de e par un entier.

V Sommes de puissances

V.A La fonction $t \mapsto t^n$ étant croissante sur $[k,k+1]$ on en déduit $k^n \leqslant \int_k^{k+1} t^n \mathrm{d}t \leqslant (k+1)^n$ d'où en ajoutant les inégalités: $\int_0^p t^n\mathrm{d}t \leqslant U_n(p) \leqslant \int_0^{p+1} t^n \mathrm{d}t$.

On déduit en calculant les intégrales: $\frac{p^{n+1}}{n+1} \leqslant U_n(p) \leqslant \frac{(p+1)^{n+1}}{n+1}$.

Comme $(p+1)^{n+1} \sim p^{n+1}$ quand p tend vers $+\infty$ on obtient $U_n(p) \sim \frac{p^{n+1}}{n+1}$ quand p tend vers $+\infty$.

V.B $\Delta_n(H_k) = H_k(X+1) - H_k(X) = (X+1)X...(X+2-k) - X(X-1)...(X-k+1) = (X+1-X+k-1)H_{k-1} = kH_{k-1}$. La matrice A a tous ses coefficients nuls sauf $A_{i,i+1} = i$ pour $i \in [[1,n]]$.

V.C En utilisant le III.B.2): $U_n(p)=\sum_{k=0}^{p}k^n=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{n}S(n,j)H_j(k)=\sum_{j=0}^{n}S(n,j)\sum_{k=0}^{p}H_j(k)$ en permutant les sigma.

Avec le V.B on peut écrire $\sum_{k=0}^{p}H_j(k)=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{j+1}(H_{j+1}(k+1)-H_{j+1}(k))=\frac{1}{j+1}(H_{j+1}(p+1)-H_{j+1}(0))$ par télescopage. Puisque $H_{j+1}(0)=0$ on obtient finalement $U_n(p)=\sum_{j=0}^{n}S(n,j)\frac{1}{j+1}H_{j+1}(p+1)$.

V.D.1) $Q(X)=\frac{X(X+1)}{2}$.

V.D.2) $\Phi(P(X))=\Delta(P(\frac{1}{2}X(X-1)))=P(\frac{1}{2}X(X+1))-P(\frac{1}{2}X(X-1))$.

Φ est bien une application linéaire puisque $\Phi(\lambda P_1+P_2)=\lambda\Phi(P_1)+\Phi(P_2)$.

Puisque P est dans F, $P(X)$ est combinaison linéaire des X^k avec $1\leqslant k\leqslant n$. $\Phi(X^k)=\frac{1}{2^k}X^k(X+1)^k-\frac{1}{2^k}X^k(X-1)^k=\frac{X^k}{2^k}((X+1)^k-(X-1)^k)=\frac{X^k}{2^k}2\sum_{j\geqslant 0}\binom{k}{2j+1}X^{k-2j-1}=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{j\geqslant 0}\binom{k}{2j+1}X^{2(k-j)-1}$.

$\Phi(X^k)$ est donc combinaison linéaire de puissances impaires de X comprises entre X et X^{2n-1} puisque $1\leqslant k\leqslant n$. Par suite Φ va bien de F dans G.

$\Phi(P(X))=0$ entraine que pour tout entier n on a $P(1+2+...+n)=P(0)=0$ ($P\in F$). Le polynôme P ayant une infinité de racines il est nul et par suite $\mathrm{Ker}(\Phi)=\{0\}$: Φ est injective.

Comme de plus F et G ont la même dimension égale à n on en déduit que Φ est un isomorphisme de F sur G.

V.D.3) En utilisant l'isomorphisme précédent et en choisissant $n\geqslant r+1$ on obtient qu'il existe un unique polynôme P_r appartenant à F tel que $X^{2r+1}=\Phi(P_r(X))=P_r(\frac{1}{2}X(X+1))-P_r(\frac{1}{2}X(X-1))$. On en déduit: $\sum_{k=1}^{p}k^{2r+1}=\sum_{k=1}^{p}\left(P_r\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)-P_r\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)\right)=P_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$ par télescopage (avec $P_r(0)=0$ puisque $P_r\in F$).

V.E.1) Si $P_r(X)$ a pour terme dominant a_dX^d on en déduit que $P_r\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)\sim a_d\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^d$. L'équivalent obtenu au V.A donne $U_{2r+1}(p)\sim\frac{p^{2r+2}}{2r+2}$. Cela entraine $d=r+1$ et $a_d=\frac{2^r}{r+1}$.

$P_r(X)$ a donc pour terme dominant $\frac{2^r}{r+1}X^{r+1}$.

V.E.2) Puisque P_r est dans F son terme constant est nul.

En dérivant $X^{2r+1}=P_r(\frac{1}{2}X(X+1))-P_r(\frac{1}{2}X(X-1))$ on obtient $(2r+1)X^{2r}=\frac{(2X+1)}{2}P_r'(\frac{1}{2}X(X+1))-\frac{(2X-1)}{2}P_r'(\frac{1}{2}X(X-1))$ qui donne en remplaçant X par 0: $0=P_r'(0)$ (pour $r\geqslant 1$).
Le coefficient de X dans $P_r(X)$ est donc nul et par suite X^2 divise $P_r(X)$.

V.E.3) Le V.E.1 donne que $P_1(X)$ a pour terme dominant X^2 donc il est égal à X^2.
Le V.E.1 donne que $P_2(X)$ a pour terme dominant $\frac{4}{3}X^3$ donc il est égal à $\frac{4}{3}X^3+\lambda X^2$.
Pour $p=1$ on obtient $P_2(1)=1$ d'où $\frac{4}{3}+\lambda=1$, donc $\lambda=-\frac{1}{3}$ et $P_2(X)=\frac{4}{3}X^3-\frac{1}{3}X^2$.
On ferait de même pour calculer $P_3(X)=2X^4+\lambda X^3+\mu X^2$.
$P_3(1)=1$ donne $\lambda+\mu=-1$.
Pour $p=2$, $P_3(3)=162+27\lambda+9\mu=129$ d'où $\lambda=-\frac{4}{3}$ et $\mu=\frac{1}{3}$. On a donc $P_3(X)=2X^4-\frac{4}{3}X^3+\frac{1}{3}X^2$.

Remarque 1: $P_2(X)+P_3(X)=2X^4$ donc $\sum_{k=1}^{p}(k^5+k^7)=\frac{1}{8}(p(p+1))^4$.

Remarque 2: On peut aussi répondre aux questions du V.E en posant $P_r(X)=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ et en écrivant $X^{2r+1}=P_r(\frac{1}{2}X(X+1))-P_r(\frac{1}{2}X(X-1))=\sum_{k=0}^{d}\frac{a_k}{2^{k-1}}\sum_{j\geqslant 0}\binom{k}{2j+1}X^{2(k-j)-1}$ (en utilisant le calcul fait au V.D.2).