Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

Centrale 2007, filière PC, première épreuve

• Partie I.

A.1) La fonction $x \longmapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable en $\pm\infty$ devant $x \longmapsto 1/x^2$; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

A.2) $m_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-e^{-x^2/2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$

A.3) On intègre par parties : $x^{n-1} \underset{D}{\longrightarrow} (n-1)\,x^{n-2},\ x f(x) \underset{P}{\longrightarrow} -f(x)$ et $x^{n-1} f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0,$ d'où $m_n = (n-1)\,m_{n-2}$.

À partir de $m_0 = 1$ et $m_1 = 0,$ on en déduit par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N},\ m_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$ et $m_{2p+1} = 0.$

B. Pour tout $t \in \mathbb{R},\ e^{-tx} f(x) = \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\big(e^{-|x|}\big),$ d'où la convergence absolue de l'intégrale envisagée. Ensuite :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-tx-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+t)^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = e^{t^2/2}.$$

C.1) $S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-tx} f(x)$ d'après le développement en série entière de l'exponentielle.

C.2) $\big|S_n(x)\big| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{|tx|^k}{k!} f(x) \leqslant e^{|tx|} f(x).$ La fonction $x \longmapsto e^{|tx|} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la même raison qu'au B., donc le théorème de convergence dominée s'applique, et donne :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^k t^k x^k}{k!} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!}\, m_k.$$

C.3) Avec C.2) et A.3) : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!}\, m_{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} \cdot \frac{(2p)!}{2^p p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^p}{p!} = e^{t^2/2}.$

• Partie II.

A. On vérifie que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ possédant f.

- $f \in E,$ d'après la définition de E, avec $M(f) = \lambda = 1.$
- Soient $(g,h) \in E^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$ Avec des notations évidentes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\alpha g(x) + \beta h(x)| \leqslant |\alpha||g(x)| + |\beta||h(x)| \leqslant |\alpha| M(g) f(\lambda x) + |\beta| M(h) f(\mu x).$$

Posons alors $M = |\alpha| M(g) + |\beta| M(h)$ et $\rho = \min(\lambda,\mu)$; il vient $|\alpha g(x) + \beta h(x)| \leqslant M f(\rho x),$ donc $\alpha g + \beta h \in E.$

B.1) x étant fixé dans $\mathbb{R}$, notons $\varphi(t) = u(t)\,v(x-t).$ φ est continue sur $\mathbb{R}$ et, toujours avec des notations évidentes :

$$|\varphi(t)| = |u(t)|\,|v(x-t)| \leqslant M(u)M(v) f(\lambda t) f\big(\mu(x-t)\big) \leqslant \frac{M(u)M(v)}{\sqrt{2\pi}} f(\lambda t) = \underset{t\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\big(e^{-|t|}\big).$$

Cela assure l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}$, et donc aussi la bonne définition de $u * v$ au point x.

B.2) Il suffit d'effectuer le changement de variable $s = x - t$ dans l'intégrale qui définit $(u*v)(x)$.

B.3) $(f*f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-t)^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{xt} f\big(t\sqrt{2}\big)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2/2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{xu/\sqrt{2}} f(u)\,\mathrm{d}u.$

D'après **I-**B., $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{xu/\sqrt{2}} f(u)\,\mathrm{d}u = e^{x^2/4},$ donc $(f*f)(x) = \dfrac{e^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f\Big(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\Big).$

B.4) - Remarquons d'abord que toutes les fonctions de E sont bornées (car f l'est) et intégrables sur $\mathbb{R}$ (par exemple par comparaison avec $x \longmapsto e^{-|x|}$ en $\pm\infty$).
Posons alors, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,t) = u(t)\,v(x-t).$
$\varphi(\,\cdot\,,t)$ est continue puisque v l'est et $|\varphi(x,t)| \leqslant N_\infty(v)|u(t)|,$ fonction indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par théorème, $u*v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Avec les notations du B.1), et en posant de nouveau $\rho = \min(\lambda, \mu)$, il vient ensuite :
$|\varphi(x,t)| = |u(t)|\,|v(x-t)| \leqslant M(u)M(v)f(\lambda t)f\big(\mu(x-t)\big) \leqslant M(u)M(v)f(\rho t)f\big(\rho(x-t)\big)$ d'où, en intégrant sur $\mathbb{R}$:

$$|(u*v)(x)| \leqslant M(u)M(v)\int_{\mathbb{R}} f(\rho t)\,f\big(\rho(x-t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{M(u)M(v)}{\rho}\int_{\mathbb{R}} f(s)\,f(\rho x - s)\,\mathrm{d}s = \frac{M(u)M(v)}{\rho}\,(f*f)(\rho x).$$

La question précédente donne alors $|(u*v)(x)| \leqslant \dfrac{M(u)M(v)}{\rho\sqrt{2}}\,f\left(\dfrac{\rho x}{\sqrt{2}}\right)$, ce qui montre que $u*v$ appartient à E.

C.1) Comme u appartient à E on a encore, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-tx}u(x) = \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\big(e^{-|x|}\big)$, d'où l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto e^{-tx}u(x)$. $\widehat{u}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ entier.

C.2) Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, posons $\varphi(t,x) = e^{-tx}u(x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\,\cdot\,,x)$ est de classe C^2, avec $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = -xe^{-tx}u(x)$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) = x^2e^{-tx}u(x)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\,\cdot)$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,\,\cdot)$ sont continues, car u l'est.
Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $(t,x) \in [-A,\,A]\times\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant |x|e^{A|x|}|u(x)|$ et $\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x)\right| \leqslant x^2e^{A|x|}|u(x)|$.
Comme u appartient à E, les deux fonctions majorantes, indépendantes de t, sont négligeables à l'infini devant $x \longmapsto e^{-|x|}$ et elles sont donc intégrables sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, appliqué deux fois, $\widehat{u}$ est de classe C^2 sur $[-A,\,A]$, avec :

$$(\widehat{u})'(t) = -\int_{\mathbb{R}} x\,e^{-tx}u(x)\,\mathrm{d}x \quad\text{et}\quad (\widehat{u})''(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2e^{-tx}u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ce résultat étant valable pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il est encore valable sur $\mathbb{R}$ entier.

D.1) Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ posons $q(x,t) = t^2 + (x-t)^2$. q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, évidemment définie positive ; $\sqrt{q}$ est donc une norme (euclidienne) sur $\mathbb{R}^2$, qui est équivalente à la norme euclidienne canonique, puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{q(x,t)} = \sqrt{t^2+(x-t)^2} \geqslant \alpha\sqrt{t^2+x^2}$.
En prenant $a = \alpha^2$, on obtient l'inégalité souhaitée.

D.2) - $u*v$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question B.4), dont on conserve par ailleurs toutes les notations.
- La fonction $\varphi\,:\,(x,t) \longmapsto u(t)\,v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, puisque u et v sont continues sur $\mathbb{R}$.
- $|\varphi(x,t)| \leqslant M(u)M(v)f(\rho t)f\big(\rho(x-t)\big) = \dfrac{M(u)M(v)}{2\pi}\,\exp\Big(\dfrac{-\rho^2}{2}\big(t^2+(x-t)^2\big)\Big)$.
Il vient alors, d'après la question précédente : $|\varphi(x,t)| \leqslant \dfrac{M(u)M(v)}{2\pi}\,\exp\Big(\dfrac{-a\rho^2}{2}(x^2+t^2)\Big) = h_1(x)h_2(t)$, avec par exemple $h_1(x) = \dfrac{M(u)}{\sqrt{2\pi}}e^{-a\rho^2x^2/2} = M(u)f(\rho\sqrt{a}\,x)$ et $h_2(t) = \dfrac{M(v)}{\sqrt{2\pi}}e^{-a\rho^2t^2/2} = M(v)f(\rho\sqrt{a}\,t)$.
Les fonctions h_1 et h_2 sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (elles appartiennent à E).
- On peut donc appliquer à φ le résultat admis dans l'énoncé, ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}}(u*v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\left(\int_{\mathbb{R}} v(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

On pose alors $y = x-t$ dans l'intégrale intérieure, pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}}(u*v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(t)\left(\int_{\mathbb{R}} v(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\,\mathrm{d}t\,.\int_{\mathbb{R}} v(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x\,.\int_{\mathbb{R}} v(x)\,\mathrm{d}x.$$

D.3) On remarque que la question précédente correspond au cas particulier $\theta = 0$.
θ étant maintenant fixé dans $\mathbb{R}$, posons $U(x) = e^{-\theta x}u(x)$ et $V(x) = e^{-\theta x}v(x)$. U et V sont continues ; de plus : $|U(x)| \leqslant e^{-\theta x}M(u)f(\lambda x) = M(u)\,e^{-\theta x}e^{-\lambda^2x^2/4}f\big(\lambda x/\sqrt{2}\big)$. La fonction $T\,:\,x \longmapsto e^{-\theta x}e^{-\lambda^2x^2/4} = e^{-\theta x-\lambda^2x^2/4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$, elle est par conséquent bornée, donc $|U(x)| \leqslant M(u)N_\infty(T)f\big(\lambda x/\sqrt{2}\big)$.
Cela prouve que U appartient encore à E, et il en est de même pour V. L'application de D.2.) à U et V donne :

$$\int_{\mathbb{R}}(U*V)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} U(x)\,\mathrm{d}x\,.\int_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x}u(x)\,\mathrm{d}x\,.\int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x}v(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{u}(\theta)\widehat{v}(\theta).$$

Mais par ailleurs :

$(U * V)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} U(t)V(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t}u(t)\,e^{-\theta(x-t)}v(x-t)\,\mathrm{d}t = e^{-\theta x}\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t = e^{-\theta x}(u*v)(x).$

Par suite, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (U*V)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x}(u*v)(x)\,\mathrm{d}x = (\widehat{u*v})(\theta).$ Le résultat demandé en découle.

• Partie III.

A.1) Démonstration immédiate par récurrence, compte tenu de **II-**B.4) et **II-**D.2).

A.2) $\widehat{h_n}(x) = \big(\widehat{h}(x)\big)^n$ d'après **II-**D.3), par récurrence évidente.

B.1) $f_2 = f * f$. D'après **II-**B.3), $f_2(x) = K_2\,e^{-x^2/4}$ avec $K_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot$

B.2) Par récurrence (déjà initialisée), supposons que $f_n(x) = K_n \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2n}\Big)$ pour une certaine constante K_n.

$f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} K_n \exp\Big(-\frac{t^2}{2n}\Big)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-t)^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = K_n\,e^{-x^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{xt} f\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,t\Big)\,\mathrm{d}t.$

$f_{n+1}(x) = K_n\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\,e^{-x^2/2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,xu\Big)f(u)\,\mathrm{d}u = K_n\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,e^{-x^2/2}\,\widehat{f}\Big(-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,x\Big).$

Le résultat du **I-**B. donne alors :

$f_{n+1}(x) = K_n\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\,e^{-x^2/2}\exp\Big(\dfrac{nx^2}{2(n+1)}\Big) = K_{n+1}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2(n+1)}\Big)$, où $K_{n+1} = K_n\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\cdot$

Enfin, à partir de $K_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, une récurrence évidente donne $K_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}\cdot$

B.3) $\widehat{f_n}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big) = \Big(\widehat{f}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)^n$ d'où, en utilisant encore **I-**B., $\widehat{f_n}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big) = \Big(\exp\Big(\dfrac{t^2}{2n}\Big)\Big)^n = e^{t^2/2}.$

La suite étudiée est constante, de valeur (et de limite) $e^{t^2/2}$.

C.1) - g est clairement continue, puisque $\cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$.

- Pour $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|g(x)| \leqslant \frac{1}{2} = \dfrac{1}{2f(\pi/2)}\,f(\pi/2) \leqslant \dfrac{1}{2f(\pi/2)}\,f(x).$

Cette majoration est encore valable pour $|x| > \frac{\pi}{2}$, puisqu'alors $g(x) = 0$. Cela montre que g appartient à E.

- Enfin, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,\mathrm{d}t = 1$, donc g appartient à E_1.

C.2) Par parité de g : $(g*g)(-x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)g(-x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(-t)g(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u = (g*g)(x).$

La fonction $g*g$ est donc paire ; on peut remarquer que le même calcul montre plus généralement que si u et v sont deux fonctions paires de E, alors $u*v$ est aussi paire.

On suppose maintenant que $x \in \mathbb{R}_+$. $(g*g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\; g(x-t)\,\mathrm{d}t.$

- Si $x > \pi$: $\forall t \in [-\pi/2,\, \pi/2]$, $x - t > \pi/2$, donc $g(x-t) = 0$. Par conséquent, $(g*g)(x) = 0$.

- Si $x \leqslant \pi$: $(g*g)(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_{x-\pi/2}^{\pi/2}\big(\cos(2t-x)+\cos x\big)\,\mathrm{d}t.$

Un calcul facile conduit alors à $(g*g)(x) = \dfrac{\sin x + (\pi - x)\cos x}{8}\cdot$

C.3) Montrons par récurrence sur n (déjà initialisée) que g_n est nulle hors de $[-n\pi/2,\, n\pi/2]$. Comme les g_n sont toutes paires d'après la remarque faite au C.2), il suffit de prouver que g_n est nulle sur $]n\pi/2,\, +\infty[$.
Supposons donc ce résultat acquis au rang n et considérons un réel $x > (n+1)\pi/2$.
- Si $t \notin [-n\pi/2,\, n\pi/2]$, $g_n(t) = 0$ par hypothèse de récurrence.
- Si $t \in [-n\pi/2,\, n\pi/2]$, $x - t > \pi/2$, donc $g(x-t) = 0$.
La fonction $t \longmapsto g_n(t)g(x-t)$ est donc identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, par conséquent $g_{n+1}(x) = 0$.

C.4) $\widehat{g}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-tx}\cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(-t+i)x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-t+i)x}}{-t+i}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-\pi t/2}i + e^{\pi t/2}i}{-t+i}\right)$

$\widehat{g}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{(-t-i)\,.\,2i\,\mathrm{ch}(\pi t/2)}{t^2+1}\right) = \frac{\mathrm{ch}(\pi t/2)}{t^2+1}.$

C.5) $\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\widehat{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi t}{2\sqrt{n}}\right)^n.$

- Classiquement, $\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2}.$

- $\ln\left(\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi t}{2\sqrt{n}}\right)^n\right) = n\,\ln\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi t}{2\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\mathrm{ch}\,\frac{\pi t}{2\sqrt{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{\pi^2 t^2}{8n} = \frac{\pi^2 t^2}{8}.$

- On en conclut que $\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{(\pi^2/8\,-\,1)t^2}.$

- **Partie IV.**

A.1) On sait d'après **II-**C.2) que $\widehat{h_n}$ est de classe C^2 avec :

$$(\widehat{h_n})'(0) = -\int_{\mathbb{R}} x h_n(x)\,dx = -M_{1,n} \quad \text{et} \quad (\widehat{h_n})''(0) = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x)\,dx = M_{2,n}.$$

De plus, on a ici $\widehat{h_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = 1,$ puisque $h_n \in E_1$ selon **III-**A.1).

Par théorème $\widehat{h_n}$ admet en 0 un développement limité d'ordre 2, donné par la formule de Taylor-Young :

$$\widehat{h_n}(t) = 1 - M_{1,n}\,t + \frac{M_{2,n}}{2}\,t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2).$$

A.2) La question précédente donne en particulier, pour $n=1$: $\widehat{h}(t) = 1 - M_{1,1}\,t + \frac{M_{2,1}}{2}\,t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2).$

Mais $\widehat{h_n} = \left(\widehat{h}\right)^n$ d'après **III-**A.2) donc, par produit de développements limités :

$$\widehat{h_n}(t) = 1 - nM_{1,1}\,t + \left(\frac{n(n-1)}{2}\,M_{1,1}^2 + \frac{n}{2}\,M_{2,1}\right)t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2).$$

L'unicité du développement limité donne alors $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = n(n-1)\,M_{1,1}^2 + n\,M_{2,1},$ d'où aussi ;

$$V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = n(n-1)\,M_{1,1}^2 + n\,M_{2,1} - n^2 M_{1,1}^2 = n\left(M_{2,1} - M_{1,1}^2\right) = nV_1.$$

B. On fixe maintenant t dans $\mathbb{R}$. Compte tenu du développement limité de $\widehat{h}$ et de l'hypothèse $M_{1,1}=0,$ il vient :

$$\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{M_{2,1}}{2n}\,t^2 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Cette égalité montre que $\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) > 0$ pour n assez grand, ce qui permet d'écrire :

$$\ln\left(\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = n\,\ln\left(1 + \frac{M_{2,1}}{2n}\,t^2 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\frac{M_{2,1}}{2n}\,t^2 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{M_{2,1}}{2}\,t^2.$$

En conclusion : $\widehat{h_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\frac{M_{2,1}}{2}\,t^2\right).$