Partie I : un exemple pratique

I.A. L'équation réduite de (E) est $\dfrac{x^2}{R^2/5} + \dfrac{(y-2R/5)^2}{4R^2/25} = 1$. Donc, (E) est l'ellipse de centre le point $M_0(0,\, 2R/5)$, d'axes focal et non focal $(M_0,\, i)$ et $(M_0,\, j)$, et de demi-axes $R/\sqrt{5}$ et $2R/5$. Ce centre et ces axes fournissent les éléments de symétrie demandés. [À noter que tout diamètre de l'ellipse est axe de symétrie *oblique*, ce que l'énoncé ne demande sans doute pas.]

I.B. L'expression est égale à $(y-2R)^2$, qui est strictement positif en tout point de (E). Donc, (E) est incluse dans l'intérieur strict de (C).

I.C.

I.C1. L'équation aux abscisses des points de $(E) \cap (D)$ est $\varphi(X) = \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{(mX+m')^2}{b^2} - 1 = 0$. Cette équation, de degré effectif 2, admet pour solution unique x si, et seulement si, $\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$ et cela donne la condition nécessaire et suffisante demandée. Si, en outre, x vérifie ce système, on définit ϑ par $x = a\cos\vartheta$ et $mx + m' = b\sin\vartheta$. Un vecteur tangent à (E) en $M(x,\, mx+m')$ est alors $(-a\sin\vartheta,\, b\cos\vartheta) = (-a(mx+m')/b,\, bx/a)$ et on vérifie qu'il est colinéaire à $(1,\, m)$. Cela établit le contact demandé.

I.C2. Si une droite (d) coupe une ellipse (e) en un point unique m, on choisit le repère de $\mathscr{P}$ de façon que (e) y soit réduite à ses axes et que (d) ne soit pas verticale (s'il échet, inverser les rôles des axes de (e)). On se ramène alors à **I.C1**.

Le résultat tombe en défaut pour les deux autres types de coniques propres : par exemple, pour la parabole d'équation $x^2 = 2py$ ou l'hyperbole d'équation $xy = \ell^2$ (où $\ell \neq 0$), la droite d'équation $x = x_0$, avec $x_0 \neq 0$, coupe la conique en un seul point sans lui être tangente. Cela reste vrai en revanche dans le cas d'une droite non parallèle à une asymptote d'une hyperbole et dans celui d'une droite non parallèle à l'axe d'une parabole (les calculs sont alors analogues). [*Les cas exclus correspondent en fait à un second point d'intersection à l'infini.*]

I.C3. En effet, ces deux droites coupent (E) respectivement en les seuls points $M(R/3,\, 2R/3)$ et $M(-R/3,\, 2R/3)$. Voir la figure générale en fin de corrigé.

I.D. En posant $t = \operatorname{tg}\vartheta/2$, on voit que M est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $(C) \setminus \{A_3(-R,\, 0)\}$. [En d'autres termes, le point A_3 est le point *à l'infini* de la conique (C) pour le paramétrage rationnel M.]

I.E. Simple vérification.

I.F.

I.F1. Sauf si $M = M(0) = A_1$, $\widehat{M}$ est le point de paramètre $1/t$. [Cela confirme la remarque faite en **I.D**.] En outre, vu **I.E**, la droite $A_0\widehat{M}$ recoupe alors (γ) en le point $M(u)$, où $s_0 = u + 1/t$ et $p_0 = u/t$ vérifient $(1-p_0)R + 2s_0R - (1+p_0)R = 0$, soit $u + 1/t = u/t$ puis $u = 1/(1-t)$. [Si $t = 0$, c'est-à-dire $M = A_1$, $A_0\widehat{M}$ recoupe (γ) en le point A_2. Si $t = 1$, c'est-à-dire $M = A_2$, $A_0\widehat{M}$ recoupe (γ) en le point à l'infini A_3.]

I.F2. On obtient $(p+1)s = \dfrac{1+t-t^2}{1-t}$ et $p = t/(1-t)$, d'où $p \neq -1$ et $t = p/(p+1)$. Il s'ensuit que $(p+1)s = p^2+3p+1$. Une équation de $(M(t)\, M(u))$ est alors $(1-p^2)X + (p^2+3p+1)Y - R(1+p)^2 = 0$ et cette droite coupe (E) en un unique point B, de coordonnées

$$x = (1-p^2)R/(3p^2+4p+3),\ y = 2R(1+p)^2/(3p^2+4p+3)$$

La droite $(M(t)\,M(u))$ est donc bien tangente à (E) (le dénominateur $3p^2+4p+3$ n'est jamais nul).

I.F3. Si $A\notin\{A_1,\,A_2,\,A_3\}$, c'est-à-dire si $A=M(t)$, où $t\neq 0\neq 1$, on lui associe A', point où $A_0\widehat{A}$ recoupe (C) : $\widehat{A}$ est construit à partir de A comme en **I.F1** et A' a pour paramètre $1/(1-t)\neq 0\neq 1$; en outre, (AA') est tangente à (E). La même construction à partir de A' donne le point A'', de paramètre $\dfrac{1}{1-1/(1-t)}=\dfrac{t-1}{t}\neq 0\neq 1$, et $(A'A'')$ est tangente à (E). Enfin, la même construction à partir de A'' donne le point A''', de paramètre $\dfrac{1}{1-(t-1)/t}=t$ qui est le point A initial. En outre, on a ainsi établi que $(A''A)$ est tangente à (E). En conclusion, le triangle $AA'A''$ est inscrit dans (C) et circonscrit à (E). Enfin, si on part par exemple de $A=A_1$, on construit le triangle $A_1A_2A_3$ inscrit dans (C) et circonscrit à (E), les autres cas s'en déduisant par permutation circulaire.

Scholie. La configuration des coniques (C) et (E) n'est pas générique, car elles sont en fait bitangentes, une fois qu'on les a plongées dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ (cela résulte de **I.B**, vu la présence d'une droite double dans le faisceau ponctuel qu'elles engendrent). Dans ce cas, nos grand-parents savaient que l'application $A\longmapsto A'$ de **I.F3** est homographique. Ici, cette homographie est d'ordre fini, égal à 3, et cela explique les phénomènes rencontrés.

I.G. Voir la figure générale en fin de corrigé.

Partie II : correspondances algébriques

II.A. Soit $(a,\,b)$ les coordonnées de A. Alors

$$A\in(M(t)\,M(u))\iff(1-p)a+sb-R(1+p)=0\iff(a+R)p-bs+R-a=0$$

Cela définit bien une $1-$correspondance, sauf si, et seulement si, $a=-R$ et $b=0$, c'est-à-dire $A=A_3$. En revanche, la $1-$correspondance

$$M(t)\mathscr{R}\,M(u)\iff s=0\iff(M(t)\,M(u))\,//\,\mathrm{Oy}$$

n'est pas de cette forme. [Tout se passe alors comme si le point A était le point à l'infini de l'axe Oy. En réalité, une $1-$correspondance n'est autre qu'une involution de Frégier d'une conique, et ce dernier exemple montre que le point de Frégier peut être à l'infini.]

II.B.

II.B1. On a $\mathrm{d}^2=\dfrac{(a\alpha-c)^2}{a^2+b^2}$.

II.B2. On écrit que $(M(t)\,M(u))$ est tangente à (Γ) si, et seulement si, le carré de la distance de Ω à $(M(t)\,M(u))$ est égal à r^2, c'est-à-dire si, et seulement si, $\dfrac{\big((1-p)\alpha-R(1+p)\big)^2}{(1-p)^2+s^2}=r^2$. On obtient alors la relation demandée. En outre, on a affaire à une $2-$correspondance car le coefficient du terme en s^2 est $\neq 0$. [Génériquement, une $2-$correspondance est de la forme $M(t)\mathscr{R}M(u)\iff(M(t)\,M(u))$ est tangente à (Γ_0), où (Γ_0) est une conique fixée. Pour voir cela, utiliser une équation tangentielle.]

II.C. En effet, si $\mathscr{R}$ est associée à un polynôme P de la forme *supra*, le polynôme $P(2t,\,t^2)$ est non nul (donc admet un nombre fini de zéros), sauf si P est de la forme $\lambda(x^2-4y)$, avec $\lambda\neq 0$. Dans ce cas, on a même $M(t)\mathscr{R}\,M(u)\iff t=u$. [Le cas général où $\mathscr{R}$ est une $2-$correspondance et où $P(2t,\,t^2)$ est non nul, donc de degré $\leqslant 4$, traduit le fait que deux coniques ont *en général* au plus quatre tangentes communes.]

Partie III : l'alternative de Poncelet

III.A. Interprétation : quatre paramètres $t_1, \ldots, t_4$ forment un 4–cycle si, et seulement si, le quadrilatère $M(t_1)\ldots M(t_4)$ est inscrit dans (C) et circonscrit à (Γ). Il y a une infinité de 4–cycles par exemple lorsque (Γ) est le cercle centré en O et de rayon $R/\sqrt{2}$: les quadrilatères sont alors des carrés. Il n'y a aucun cycle lorsque (C) est inclus dans l'intérieur strict de (Γ).

III.B.

III.B1. Cette famille est liée si, et seulement si, $t = u$.

III.B2. Immédiat. La matrice $\mathscr{A}$ a pour coefficients ceux de P, Q, R écrits en ligne.

III.B3. Donc, $\mathscr{A}$ et $\{P, Q, R\}$ sont de même rang. La famille $\{P, Q, R\}$ est libre si, et seulement si, $\mathscr{A}$ est inversible. Vu **III.B1**, $\{W(t), W(u)\}$ est alors libre si, et seulement si, $t \neq u$.

III.B4.

III.B4a. Si $\{P, Q, R\}$, et donc $\mathscr{A}$, est de rang 2, 0 en est valeur propre et on peut supposer choisi $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $\mathscr{A}\, X_0 = 0$. En outre, pour $X \in \mathbb{R}^3$, on a $\mathscr{A}\, X = 0 \iff X \in \mathrm{Vect}\,(X_0)$. Dès lors, $\{W(t), W(u)\}$ est liée si, et seulement si, $\left\{\mathscr{A}\, V(t), \mathscr{A}\, V(u)\right\}$ est liée si, et seulement si, il existe α et β non tous nuls tels que $\alpha V(t) + \beta V(u) \in \mathrm{Vect}\,(X_0)$ si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & t^2 & u^2 \\ b & t & u \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

III.B4b. Ce déterminant est égal à $(t-u)(cp-bs+a)$ (commencer par soustraire la deuxième colonne de la troisième). Soit alors la relation définie par $M(t)\mathscr{R}_0\, M(u) \iff cp-bs+a = 0$. Si $(b, c) \neq (0, 0)$, $\mathscr{R}_0$ est bien une $1-$correspondance et le résultat demandé s'ensuit. Le cas à exclure est $b = c = 0$: il se produit si, et seulement si, $\mathscr{A} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ si, et seulement si, la première colonne de $\mathscr{A}$ est nulle si, et seulement si, les polynômes P, Q et R sont tous de degré $\leqslant 1$.

III.C.

III.C1. On a $P(s, p) = (At^2 + 2Bt + C)u^2 + 2(Bt^2 + Ct + Dt + E)u + Ct^2 + 2Et + F$. Dans le cas de l'exemple 1, $(t+u)^2 - 4tu = u^2 - 2tu + t^2$; alors $\{P_1, P_2, P_3\} = \left\{1, -2X, X^2\right\}$ est de rang 3. Dans celui de l'exemple 2, on obtient $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 & \beta^2 \\ 0 & -2\alpha^2 & 0 \\ \beta^2 & 0 & -\beta^2 \end{pmatrix}$, de rang 2. Ainsi, on peut choisir $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ et la $1-$correspondance associée est $M(t)\mathscr{R}_0\, M(u) \iff p + 1 = 0$, c'est-à-dire $M(t)\mathscr{R}_0\, M(u)$ si, et seulement si, $M(t)$ et $M(u)$ sont diamétralement opposés. [Avec les résultats des questions suivantes, les quadrilatères associés aux 4–cycles sont des rectangles.]

III.C2. Immédiat.

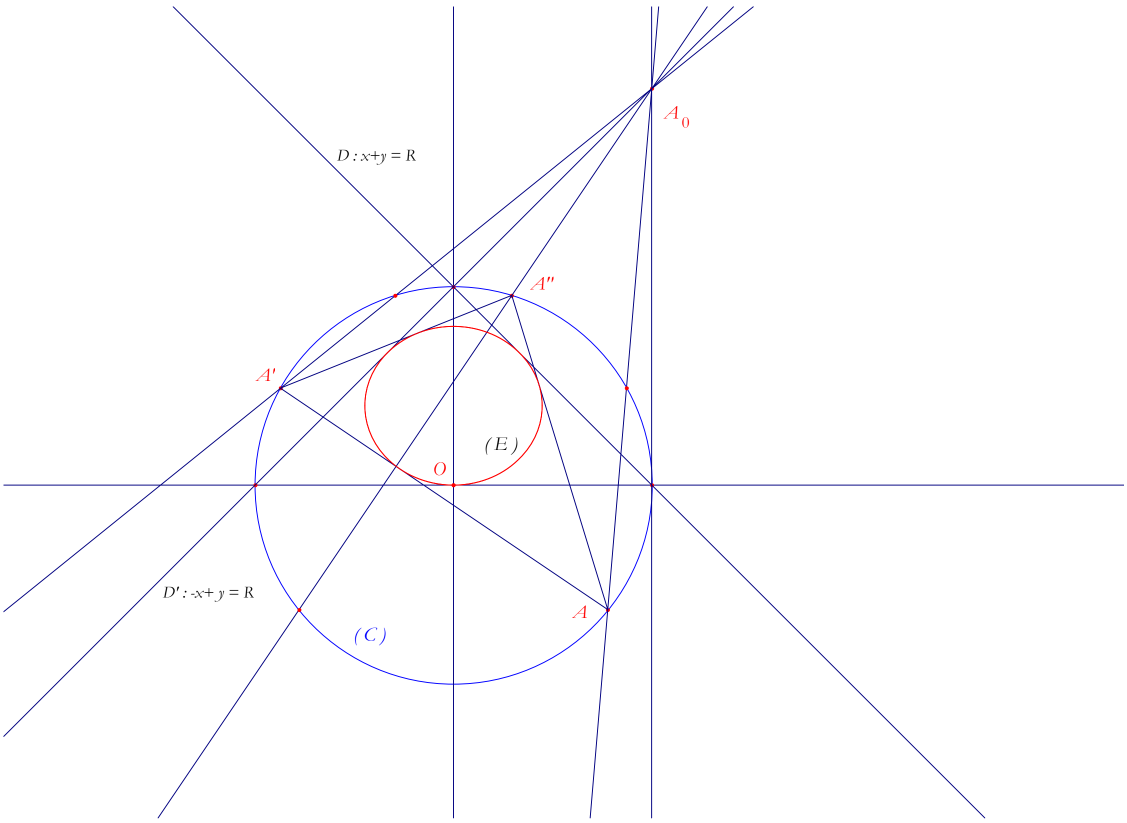
III.C3.

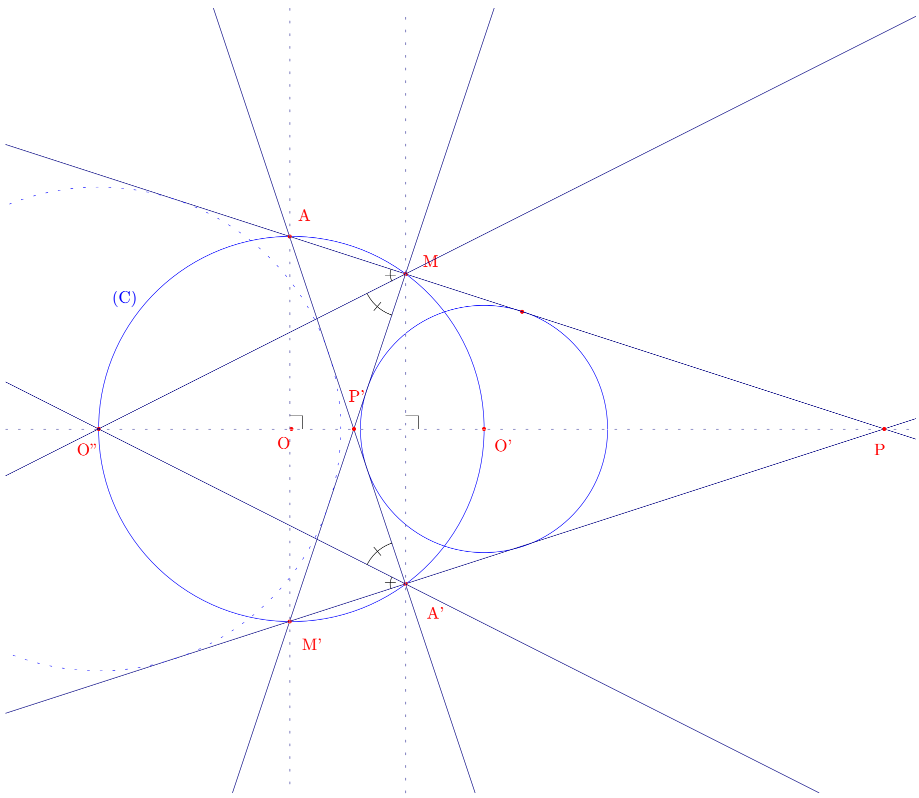
III.C3a. $\Delta(t) < 0$ est toujours vrai si $\mathscr{R}$ est définie comme en **II.B2**, (E) étant incluse dans l'intérieur strict de (C). Dans ce cas, il n'y a aucun 4–cycle. De même, $\Delta(t) \geqslant 0$ n'est vrai que pour $t = 0$ dans les mêmes conditions, si on choisit (E) tangente intérieurement à (C) au point A_1. Dans ce cas, l'équation *supra* en u n'a pas de racine réelle pour $t \neq 0$ et a la racine double 0 pour $t = 0$: le seul 4–cycle est

alors (0, 0, 0, 0).
III.C3b. Cela résulte d'un argument de continuité des fonctions Δ et P_1. L'équation du **III.C2** est alors, pour tout $t \in \mathscr{I}_0$, de degré effectif 2 et possède deux racines réelles distinctes.
III.C3c. Si $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre, si $t \in \mathscr{I}_0$ et si par exemple t, t', t'', t''' est un 4–cycle, avec des paramètres distincts, alors les équations (en u) $P_1(t)u^2 + 2P_2(t)u + P_3(t) = 0$ et $P_1(t'')u^2 + 2P_2(t'')u + P_3(t'') = 0$ ont les deux mêmes racines $t' \neq t'''$. Les vecteurs $W(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix}$ et $W(t'') = \begin{pmatrix} P_1(t'') \\ P_2(t'') \\ P_3(t'') \end{pmatrix}$ sont donc liés. Vu **III.B3**, on a $t = t''$, ce qui est absurde.
III.C3d. Si $\{P_1, P_2, P_3\}$ est de rang 2, on lui associe $\mathscr{R}_0$ comme en **III.B4b**. En outre, si $t_1 \in \mathscr{I}_0$ et $M(t_1)\mathscr{R}_0\, M(t_2)$ alors les équations $P_1(t_1)u^2+2P_2(t_1)u+P_3(t_1) = 0$ et $P_1(t_2)u^2+2P_2(t_2)u+P_3(t_2) = 0$ ont deux racines $u_1 \neq u_2$ en commun car elles sont proportionnelles et car la première a deux racines réelles distinctes. Alors, t_1, u_1, t_2, u_2 est un 4–cycle. Comme le cardinal de $\mathscr{I}_0$ est infini et qu'on ne peut avoir $M(t)\mathscr{R}\, M(t)$ ou $M(t)\mathscr{R}_0\, M(t)$ que pour un nombre fini de valeurs de t (en effet, puisque $\{P_1, P_2, P_3\}$ est de rang 2, on ne peut être dans le cas exceptionnel de **II.C**, *confer* **III.C1**), on peut choisir d'une infinité de façons un 4–cycle formé de paramètres distincts.

III.C4.

III.C4a. La matrice $\mathscr{A}$ est dans ce cas égale à $\begin{pmatrix} A & 0 & C \\ 0 & C+D & 0 \\ C & 0 & F \end{pmatrix}$, avec $A = (R+\alpha)^2 - r^2$, $C = -r^2$, $D = R^2 + r^2 - \alpha^2$ et $F = (R-\alpha)^2 - r^2$ et le déterminant en est $(C+D)(AF - C^2)$, ce qui conduit à l'expression demandée. On aura donc établi le résultat si on montre que $\mathscr{A}$ n'est jamais de rang $\leqslant 1$. Or, $C(C+D) \neq 0$ si $\alpha \neq \pm R$ et, sinon, on a $AF - C^2 \neq 0$.
III.C4b. On a $\alpha = \pm R$ si, et seulement si, (Γ) est centré en A_1 ou en A_3. On se reportera alors à la construction de la seconde figure : les tangentes en M à (Γ) recoupent (C) en A et M'. Les droites (MA) et (MM') sont symétriques par rapport à (MO') donc aussi par rapport à (MO'') [voir l'angle droit $\left(\overrightarrow{MO''}, \overrightarrow{MO'}\right)$]. Les angles (inscrits) AMO'' et $O''MM'$ sont donc égaux, donc aussi les angles au centre AOO'' et $O''OM'$. Donc M' est symétrique de A par rapport à OO'. Si la seconde tangente à (Γ) en A recoupe (C) en A' ; le même raisonnement montre que A' est le symétrique de M, et donc que $M'A'$ est tangente à (Γ). Le quadrilatère (croisé) $MAA'M'$ est donc inscrit dans (C) et circonscrit à (Γ). À noter que (Γ) est un cercle exinscrit aux triangles AMP' et $A'M'P'$; un autre tel cercle existe, centré en O', mais il dépend du choix du point A.


A_0
$D: x+y=R$
A''
A'
(E)
O
$D': -x+y=R$
A
(C)


A
M
(C)
P'
O"
O
O'
P
A'
M'