MATHÉMATIQUES I

Notations

On note I le segment $[-1,1]$ de $\mathbb{R}$ et E l'espace préhilbertien complexe des fonctions continues sur I à valeurs complexes muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_I \overline{f(t)}g(t)dt \ .$$

Pour tout nombre complexe z n'appartenant pas à l'intervalle $]-\infty, 0]$, on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'unique nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi[$ tel que $z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}(z)}$.

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $p \leq n$, $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Questions préliminaires

a) Déterminer le développement en série entière au point 0 de la fonction :

$$]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

et préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} .$$

Montrer que la fonction :

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ est définie sur } \Delta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\} .$$

c) Montrer que φ est une racine carrée de la fonction

$$\Delta \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{1-z} \text{ autrement dit, pour tout } z \in \Delta, (\varphi(z))^2 = \frac{1}{1-z} .$$

d) Montrer que :

$$\forall z \in \Delta, \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{|1-z|}} e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(1-z)} .$$ Que vaut $\varphi(x)$ lorsque $x \in]-1, 1[$?

On pourra dorénavant noter

$$\varphi(z) = (1-z)^{-1/2} \text{ pour } z \in \Delta .$$

Filière PC

e) *Cette question est indépendante des précédentes.*

Pour tout entier naturel n, prouver l'existence d'une fonction polynomiale H_n telle que, pour tout réel θ, on a $H_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Partie I -

I.A - Montrer que, pour tout $t \in I$, la fonction

$$\psi_t :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(t, x) \text{ définie par : } \psi_t(x) = (1 - 2xt + x^2)^{-1/2}$$

est l'unique solution sur $]-1, 1[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux prenant la valeur 1 en 0. On donnera cette équation différentielle :

(E) : $a(t, x)y' + b(t, x)y = 0$ où a et b sont des polynômes unitaires en x.

I.B -

I.B.1) Vérifier que pour $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\Psi_{\cos\theta}(x) = \varphi(xe^{i\theta})\varphi(xe^{-i\theta}) \text{, puis } \Psi_{\cos\theta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\theta)x^n$$

où G_n est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'applications de la forme $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Préciser la valeur de $G_n(0)$.

I.B.2) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $G_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$ où P_n est un polynôme à coefficients réels.

I.B.3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|G_n(\theta)| \le G_n(0)$, puis que pour

$$t \in [-1, 1] \text{ et } x \in]-1,1[,\ f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)x^n \qquad (1)$$

avec convergence normale sur $[-1, 1] \times [-a, a]$ où $a \in]0, 1[$.

I.B.4) Montrer que la suite $(P_n)_{n \ge 0}$ vérifie $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ et pour

$$n \ge 1,\ (2n+1)tP_n(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t) \qquad (2)$$

I.B.5) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré et la parité de P_n. Déterminer le coefficient dominant de P_n, ainsi que $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

I.C -

I.C.1) Soit a et b deux éléments distincts de $]1, +\infty[$. Calculer et simplifier la dérivée de la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$h\ : t \mapsto \ln\left[\frac{(a-t)+(b-t)}{2} - \sqrt{(a-t)(b-t)}\right]$$

après avoir vérifié qu'elle est bien définie.
En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(a-t)(b-t)}}$$ pour tout couple (a,b) d'éléments de $]1, +\infty[$.

I.C.2) Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} f(t,x) f(t,y) dt = \frac{1}{\sqrt{xy}} \ln\left[\frac{1+\sqrt{xy}}{1-\sqrt{xy}}\right]$$ pour tout couple (x,y) d'éléments de $]0, 1[$.

On admettra sans démonstration l'identité suivante :

$$2\sqrt{xy}(1-x)(1-y) - (x+y)(1+xy) + 4xy = (1+\sqrt{xy})^2 (2\sqrt{xy} - (x+y))$$

I.C.3)

a) Pour tout couple (x,y) d'éléments de $]0, 1[$ établir que :

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} \ln\left[\frac{1+\sqrt{xy}}{1-\sqrt{xy}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^n y^n .$$

b) On fixe y dans l'intervalle $]0, 1[$. Montrer que, pour tout couple (t,x) appartenant à $I \times]0, 1[$:

$$f(t,x) f(t,y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) f(t,y) x^n$$

la série convergeant normalement sur tout l'ensemble de la forme $I \times]0, a]$ avec $a \in]0, 1[$. Conclure que :

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) f(t,y) dt = \frac{2}{2n+1} y^n .$$

c) En écrivant que, pour tout $(t,y) \in I \times]0, 1[$, $f(t, y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) y^m$, prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t) dt\right) y^m = \frac{2}{2n+1} y^n .$$

d) Conclure que

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{n,m} = 1$ si $m = n$ et $\delta_{n,m} = 0$ sinon. Interpréter le résultat obtenu.

I.D - Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et z un zéro de P_n (*a priori* dans $\mathbb{C}$). On note R_n la fonction polynôme telle que, pour $t \neq z$, $R_n(t) = \dfrac{P_n(t)}{t-z}$.

I.D.1) Calculer $(R_n|P_n)$.

I.D.2) En déduire que z est réel et que $|z| < 1$.

I.D.3) Montrer que z est une racine simple de P_n.

I.E -

I.E.1) En utilisant (2), établir que, pour tout entier naturel n et tout couple (x,y) de nombres complexes distincts :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)]}{x-y}. \qquad (3)$$

I.E.2) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)(P_k(x))^2 = (n+1)[P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)] \qquad (4)$$

I.E.3) Déduire de cette dernière formule que tout zéro de P_n est strictement compris entre deux zéros consécutifs de P_{n+1}.

I.F - Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, on note Af la fonction de I dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$Af(t) = \frac{d}{dt}[(1-t^2)f'(t)]$$

Prouver que, pour tout couple (f,g) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, $(Af|g) = (f|Ag)$.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout entier k, $0 \leq k \leq n-1$, $(P_k|AP_n) = 0$.

En déduire que P_n est solution de l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0. \qquad (5)$$

Partie II -

II.A -

II.A.1) On associe à $n \in \mathbb{N}$ et à $f \in E$ le coefficient $c_n(f) = (P_n|f)$.
Montrer que la série de terme général

$\left(n + \frac{1}{2}\right)|c_n(f)|^2$ est convergente.

II.A.2) Montrer, à l'aide de I.F - que si $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors la série $\sum n^5 |c_n(f)|^2$ est convergente.

En déduire que la série $\sum n|c_n(f)|$ est convergente.

II.B -

II.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n dans E par $f_n : t \mapsto t^n$.

Montrer que si $f \in E$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_n|f) = 0$ alors f est nulle.

II.B.2) Supposant $f \in E$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, montrer que l'expression :

$$g(t) = f(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) c_n(f) P_n(t) \text{ définit sur } I \text{ une fonction continue } g.$$

II.B.3) Montrer que g est nulle.

II.B.4) Déduire de ce qui précède une condition suffisante pour que la série de fonctions

$$\sum \left(n + \frac{1}{2}\right) c_n(f) P_n \text{ converge normalement sur } I \text{ et ait pour somme } f.$$

II.C - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, vérifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}$ est intégrable sur le segment I.

Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto Q_n(x)$ définie par :

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\, dt$$

est une fonction polynôme de degré $(n-1)$ et que la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions initiales $Q_0 = 0$, $Q_1 = 2$ et la même relation de récurrence que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang $n = 1$.

II.D - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de P_n écrits dans l'ordre croissant, *i.e.* $-1 < a_1 < \ldots < a_n < 1$.

II.D.1) Montrer que $\mathscr{B} = (L_1, \ldots, L_n)$ où

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \text{ est une base de } R_{n-1}[X].$$

II.D.2) Soit $\mathscr{C} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où $\varphi_i : R_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a_i)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $R_{n-1}[X]$.

II.D.3) En déduire qu'il existe une suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de nombres réels et une seule telle que :

$$\forall P \in R_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i).$$

II.D.4) Montrer, en utilisant éventuellement une division euclidienne par P_n :

$$\forall P \in R_{2n-1}[X], \int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i). \tag{6}$$

II.D.5) Montrer que les λ_i sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$ et que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2$

II.E -

II.E.1) Montrer que si Q_n est le polynôme défini en II.C alors, avec les notations de II.D, on a :

$$Q_n(x) = P_n(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}.$$

On pourra commencer par examiner le cas où $x > 1$.

II.E.2) En déduire que les $(n-1)$ zéros de Q_n sont situés strictement entre les zéros de P_n.

II.F -

II.F.1) Montrer, pour $x > 1$, que :

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i}\left(\frac{a_i}{x}\right)^{2n} - \frac{1}{x^{2n}}\int_{-1}^{1} \frac{t^{2n}}{x-t} dt.$$

II.F.2) En déduire que, pour tout $\alpha > 0$, la suite de fonctions

$$\left(\frac{Q_n}{P_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

approche uniformément la fonction

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \text{ sur l'intervalle } [1+\alpha, +\infty[.$$

••• FIN •••
