Centrale 2005 - Math 1 PC

Titre : *Suites ultimement périodiques.*

On dit qu'une suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **ultimement périodique** lorsqu'elle est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(\mathcal{R}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n.$$

(L'entier p est une période de la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$).
On note UP l'ensemble des suites ultimement périodiques de réels.

Partie I -

I.A - La suite nulle appartient à UP. Il lui est associ ($n_0 = 0$, $p = 1$).
Soient deux réels λ et μ et deux suites ultimement périodiques $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auxquelles leur est associé (n_0, p) et (m_0, q).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \max(n_0, m_0)$, on a $\lambda a_{n+pq} + \mu b_{n+pq} = \lambda a_n + \mu b_n$, ainsi $\lambda a + \mu b$ est ultimement périodique.
UP est donc un sous espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

Soit $(a^1, a^2, \ldots, a^d)$ une base de UP, dans le cas o l'espace est de dimension finie. Chaque a^k est p_k-périodique à partir d'un certain rang.

Un calcul analogue au prcdent montre que tout lment de UP est alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{d} p_k$ -périodique à partir d'un certain rang. Ce qui contredit la possibilit de construire des suites prio-diques de n'importe quelle priode choisie l'avance.
UP n'est donc pas de dimension finie.

I.B - Soit $a \in UP$ et $\mathcal{P}(a)$ l'ensemble des entiers $p \geq 1$ tels que la suite a admette p pour période à partir d'un certain rang.

I.B.1) $\mathcal{P}(a)$ est un ensemble non vide d'entiers ≥ 1, il admet donc un plus petit lment $T \geq 1$. Pour T, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathcal{R})$, ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m_0 \Rightarrow a_{n+kT} = a_n.$$

Il en rsulte que l'ensemble $\mathbb{N}^*T = \{kT,\, k \in \mathbb{N}^*\}$ vrifie $\mathbb{N}^*T \subset \mathcal{P}(a)$.
Inversement soit $p \in \mathcal{P}(a)$ et n_0 associ.
La division euclidienne de p par T donne $p = kT + r$ avec $0 \leq r < T$ et $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$\forall n \geq \max(n_0, m_0),\ a_{n+p} = a_n \text{ et } a_{n+p} = a_{n+r+kT} = a_{n+r}$$

Il en rsulte que $r \in \mathcal{P}(a)$ si $r > 0$, ce qui contredit la minimalit de T.
Ainsi $r = 0$ et $\mathbb{N}^*T \subset \mathcal{P}(a)$.
En conclusion, il existe un entier $T \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(a) = \mathbb{N}^*T$.

Lorsque $T = 1$, la suite devient stationnaire à partir de l'indice m_0.

I.B.2) L'ensemble des $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow a_{n+T} = a_n$ est non vide, il existe donc un plus petit entier n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+T} = a_n.$$

Comme $\mathcal{P}(a) = \mathbb{N}^*T$, il est clair que, pour tout $p \in \mathcal{P}(a)$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique à partir de l'indice n_0.
Supposons qu'il existe $p_0 \in \mathcal{P}(a)$ telle que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit p_0-périodique à partir d'un indice $m_0 < n_0$. On a donc $p_0 = k_0T$ avec $k_0 \geq 2$.
Considrons l'indice $n_1 = n_0 - 1$. On a $n_1 \geq m_0$ donc $a_{n_1+p_0} = a_{n_1}$. Par ailleurs $a_{n_1+p_0} = a_{n_1+T+(k_0-1)T}$ et $n_1 + T \geq n_0$ donc $a_{n_1+p_0} = a_{n_1+T}$.
Il en rsulte que $a_{n+T} = a_n$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui contredit la dfinition de n_0.
Ainsi, pour tout $p \in \mathcal{P}(a)$, n_0 est le plus petit entier à partir duquel la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ devient p-périodique.

Une suite ultimement périodique a est compltement dtermine par la donne de la partie initiale des n_0 premiers termes $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}$ et de la partie priodique $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n_0+T-1}$ de longueur T.
Les $n_0 + T + 1$ paramtres T et $a_0, \ldots, a_{n_0+T-1}$ permettent de reconstituer les deux parties d'une suite ultimement périodique.

I.C - Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de UP.

I.C.1) Les lments de la suite a ont au plus $n_0 + T$ valeurs distinctes, la suite a est donc bornée par $M = \sup_{0\leq i<n_0+T} |a_i|$.
La majoration $|a_nx^n| \leq M|x|^n$ montre que la srie entire $\sum a_nx^n$ converge absolument pour $|x| < 1$, elle a donc un rayon de convergence vrifiant $R_a \geq 1$.

Si la partie priodique $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n_0+T-1}$ contient un terme non nul alors la srie $\sum |a_n|$ est divergente donc $R_a \leq 1$.
Si la partie priodique $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n_0+T-1}$ ne contient que des termes nuls (dans ce cas $T = 1$) alors la somme de la srie entire est un polynme et $R_a = +\infty$.
Finalement $R_a = +\infty$ si et seulement si $T = 1$ et $a_{n_0} = 0$. Dans le cas contraire, $R_a = 1$.

I.C.2) Lorsque $R_a = +\infty$, la somme de la srie entire est le polynme $\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} a_nx^n$. Sinon

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_nx^n + \sum_{n=n_0}^{n_0+T-1}\sum_{k=0}^{+\infty} a_nx^{n+kT} = P(x) + \frac{Q(x)}{1-x^T}$$

o $P(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} a_nx^n$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{n_0+T-1} a_nx^n$.
La somme de cette série sur $]-1,1[$ est donc une fraction rationnelle.

I.D - Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme est la restriction à $]-R,R[$ d'une fraction rationnelle $F(x)$.
Il est clair, d'aprs I.C.1), que si $R \neq 1$ ou $R \neq +\infty$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tre ultimement périodique.
On considre la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $a_n = n + 1$.
On vrifie aisment que la série entière $\sum a_nx^n$ a un rayon de convergence $R = 1$. Sa somme est la restriction à $]-1,1[$ d'une fraction rationnelle. En effet

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Cependant, la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, possède une infinité de valeurs distinctes ; elle n'est donc pas ultimement périodique.

Remarque : on peut ajouter que la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associe la fraction $F(x)$, est ultimement périodique si et seulement si il existe un entier $T \geq 1$ tel que $(1-x^T)F(x)$ soit un polynme.

Partie II -

II.A - Exemple 1

On considre la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dfinie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = 0$ si F_n est pair et $a_n = 1$ sinon.
Les premiers calculs donnent

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34\ldots$$

On montre aisment, par rcurrence sur $k \geq 0$, que F_{3k} est pair et F_{3k+1}, F_{3k+2} impairs. Il en rsulte que $a_n = 0$ si et seulement si n est un multiple de trois. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc ultimement périodique avc $n_0 = 0$, $T = 3$, $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$

D'aprs I.C-, la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence gal 1 et la somme de la série entière sur $]-1,1[$ est $\dfrac{x+x^2}{1-x^3}$.

II.B - Exemple 2

On définit maintenant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$[1] par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a_n \text{ et } a_{2n+1} = -a_n.$$

II.B.1) La suite a est borne, donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$. On a $|a_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la srie $\sum |a_n|$ est divergente et $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

II.B.2) On note S sa somme sur $]-1,1[$.

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -a_n x^{2n+1} = (1-x)S(x^2).$$

Pour tout x, $x \in]-1,1[$ et $n \in N^*$, on a donc

$$S(x) = S(x^{(2^{n+1})}) \prod_{k=0}^{n} (1 - x^{(2^k)}).$$

Pour $x \in]-1,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{(2^{n+1})} = 0$. S tant continue en 0, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} S(x^{(2^{n+1})}) = S(0)$. Or $S(0) = a_0 = 1$, ainsi

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - x^{(2^k)}).$$

Notons que, pour tout $x \in]0,1[$, on a $0 \leq S(x) \leq 1$.

II.B.3) Soit n donné dans $\mathbb{N}$. On peut crire

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - x^{(2^k)}}{1-x}\right)(1 - x^{(2^n)})S(x^{(2^{n+1})}).$$

Chaque fonction $x \mapsto \dfrac{1 - x^{(2^k)}}{1-x}$ admet un prolongement par continuit en $x = 1$. Comme S est borne sur]0,1[et $\lim\limits_{x\to1^-} (1 - x^{(2^n)}) = 0$, on obtient

$$\lim_{x\to1^-} \left(\frac{S(x)}{(1-x)^n}\right) = 0$$

[1] adaptation de la suite de Thue-Morse

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique, on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{1-x^T}$$

o $P(x) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n$ et $Q(x) = \sum_{n=n_0}^{n_0+T-1} a_n x^n$.
On vrifie aisment que, pour $n > n_0 + T$, on ne peut pas obtenir

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{S(x)}{(1-x)^n}\right) = 0$$

donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique.

II.C - Exemple 3

Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel strictement positif, donné sous forme irréductible. On définit deux suites d'entiers $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

- $d_0 = E(x)$ (partie entière) et r_0 est le reste de la division euclidienne de a par b.
- pour tout $n \geq 1$, r_n (resp. d_n) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de $10.r_{n-1}$ par b.

II.C.1) Soit $x = \frac{22}{7}$ donc $a = 22$ et $b = 7$. Les divisions successives donnent $d_0 = 3$ et $r_0 = 1$, $d_1 = 1$ et $r_1 = 3$, $d_2 = 4$ et $r_2 = 2$, $d_3 = 2$ et $r_3 = 6$,
$d_4 = 8$ et $r_4 = 4$, $d_5 = 5$ et $r_5 = 5$, $d_6 = 7$ et $r_6 = 1$, $d_7 = 1$ et $r_7 = 3$,
$d_8 = 4$ et $r_8 = 2$, $d_9 = 2$ et $r_9 = 6$, $d_{10} = 8$ et $r_{10} = 4$, etc.

II.C.2) Les r_n sont des entiers appartenant l'ensemble fini $[0, b[$, il existe donc $0 \leq n_0 \leq b$ et $1 \leq T \leq b$ tels que $r_{n_0+T} = r_{n_0}$. A partir de l'indice $n_0 + T$, on effectue alors les mmes divisions qu' partir de l'indice n_0.
Il en rsulte que, pour tout $n \geq n_0$, $r_{n+T} = r_n$ et $d_{n+T} = d_n$, ainsi les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ultimement périodiques.

II.C.3) Pour tout $n \geq 1$, d_n est le quotient de la division euclidienne de $10.r_{n-1}$ par b o $r_{n-1} < b$ ainsi $0 \leq d_n \leq 9$.

II.C.4) Montrons, par rcurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $x = E(x) + \sum_{n=1}^{k} d_n 10^{-n} + \frac{r_k}{10^k.b}$.

On a $d_0 = E(x)$ et $a = d_0 b + r_0$ donc $x = E(x) + \frac{r_0}{b}$.

On a $10.r_0 = bd_1 + r_1$ donc $\frac{r_0}{b} = \frac{10.r_0}{10.b} = \frac{bd_1 + r_1}{10.b} = \frac{d_1}{10} + \frac{r_1}{10.b}$. La proprit est donc vraie pour $k = 1$.
Supposons le rsultat vrai l'ordre $k \geq 1$.
On a $10.r_k = bd_{k+1} + r_{k+1}$ donc $\frac{r_k}{10^k.b} = \frac{10.r_k}{10^{k+1}.b} = \frac{bd_{k+1} + r_{k+1}}{10^{k+1}.b} = \frac{d_{k+1}}{10^{k+1}} + \frac{r_{k+1}}{10^{k+1}.b}$.
Le rsultat est donc vrai l'ordre $k + 1$.
On a $\lim_{k\to+\infty} \frac{r_k}{10^k.b} = 0$, ainsi la srie $\sum d_n 10^{-n}$ est convergente et

$$x = E(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}.$$

Partie III -

Pour tout $f \in E$ o $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dfinit l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x t f(t)\, dt.$$

III.A - F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xf(x)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, ainsi $F \in E$.

La linarit de l'intgrale, assure la linarit sur E de l'application $L : f \mapsto F$.

III.B - Soit $f \in E$ borné sur $\mathbb{R}$. On note $M = \|f\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

III.B.1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

si $x \geq 0$ alors $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^x t|f(t)|\,dt \leq M \int_0^x t\,dt = M\frac{x^2}{2}$;

si $x < 0$ alors $|F(x)| \leq \displaystyle\int_x^0 (-t)|f(t)|\,dt \leq M \int_x^0 (-t)\,dt = M\frac{x^2}{2}$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |F(x)| \leq M\frac{x^2}{2}.$$

III.B.2) On définit une suite d'éléments de E par $f_0 = f$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_{n+1} = L(f_n)$.

Montrons, par rcurrence sur n de $\mathbb{N}^*$, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n}M.$$

D'aprs III.B.1) le rsultat est vrai pour $n = 1$.

Supposons le rsultat vrai l'ordre $n \geq 1$. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_0^x t|f_n(t)|\,dt \leq \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{2.4\ldots 2n}M\,dt = \frac{x^{2n+2}}{2.4\ldots 2n+2}M.$$

On obtient la mme majoration pour $x < 0$ en intgrant sur $[x, 0]$.

Ainsi le rsultat est vrai l'ordre $n + 1$.

III.B.3) Soit $I = [\alpha, \beta]$ un segment de $\mathbb{R}$. Pour tout n, f_n est continue, donc bornée sur I. D'aprs III.B.2), on a

$$\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \frac{\max(|\alpha|^{2n}, |\beta|^{2n})}{2.4\ldots 2n}M = \frac{(\max(|\alpha|, |\beta|))^{2n}}{2.4\ldots 2n}M$$

Comme $\dfrac{(\max(|\alpha|, |\beta|))^{2n}}{2.4\ldots 2n}M$ est le terme gnral d'une srie convergente, de somme $Me^{\frac{(\max(|\alpha|,|\beta|))^2}{2}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|) = 0$.

III.C - Soit $f = \sin$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme dans la question précédente.

III.C.1) Les calculs donnent

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^x t\sin t\,dt = [-t\cos t]_0^x + \int_0^x \cos t\,dt &&= -x\cos x + \sin x; \\ f_2(x) &= \int_0^x tf_1(t)\,dt = -\int_0^x t^2\cos t\,dt + f_1(x) && \text{avec} \\ \int_0^x t^2\cos t\,dt &= \Big[t^2\sin t\Big]_0^x - \int_0^x 2t\sin t\,dt &&= x^2\sin x - 2f_1(x) \end{aligned}$$

Ainsi $f_2(x) = 3f_1(x) - x^2\sin x = 3f_1(x) - x^2 f_0(x)$.

III.C.2) Montrons, par rcurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = (2n + 1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x).$$

D'aprs III.C.1) le rsultat est vrai pour $n = 1$.

Supposons le rsultat vrai l'ordre $n \geq 1$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \int_0^x t f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x (2n+1) t f_n(t)\,dt - \int_0^x t^2 t f_{n-1}(t)\,dt \\ &= (2n+1) f_{n+1}(x) - \left(\left[t^2 f_n(t) \right]_0^x - \int_0^x 2t f_n(t)\,dt \right) \\ &= (2n+1) f_{n+1}(x) - x^2 f_n(x) + 2 f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

d'o le rsultat l'ordre $n+1$.

III.D - Pour $p \in \mathbb{N}$, on note F_p le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré au plus p.

III.D.1) On définit :

$$\begin{aligned} H : F_p \times F_p &\rightarrow F_p \times F_p \\ (P, Q) &\mapsto (P' - Q, P + Q') \end{aligned}$$

La drivation est un endomorphisme de F_p ainsi H est un endomorphisme de $F_p \times F_p$. Etudions le noyau de H :

$$\mathrm{Ker}(H) = \{(P, Q) \,/\, P' = Q, P = -Q'\}.$$

Si $Q \neq 0$ alors la premire condition implique $P \neq 0$ et $\deg(P) = \deg(Q) + 1$, ce qui est incompatible avec la deuxime condition ; donc $Q = 0$ et $P = -Q' = 0$.

H est injective et $F_p \times F_p$ de dimension finie donc H est un automorphisme de $F_p \times F_p$.

III.D.2) Soient S l'ensemble des fonctions paires de F_p et A celui des fonctions impaires. La drive d'une fonction polynme paire (resp. impaire) est une fonction polynme impaire (resp. paire) ainsi $H(S \times A) \subset A \times S$.

On a $\dim(A \times S) = \dim A + \dim S = \dim(S \times A)$ et par injectivit de H $\dim H(S \times A) = \dim\,(S \times A)$. Il en rsulte que $H(S \times A) = A \times S$.

III.D.3) Soient $P_n, Q_n \in F_n$, P_n paire et Q_n impaire, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x) \sin x + Q_n(x) \cos x.$$

Pour tout $x_k = 2k\pi$ avec $k \in \{0, 1, \ldots n\}$, on a $f_n(x_k) = Q_n(x_k)$. Q_n est donc le polynme d'interpolation de Lagrange correspondant la famille $(x_k, f_n(x_k))_{k=0,1,\ldots,n}$.

De mme, pour tout $y_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \{0, 1, \ldots n\}$, on a $f_n(y_k) = P_n(y_k)$. P_n est donc le polynme d'interpolation de Lagrange correspondant la famille $(y_k, f_n(y_k))_{k=0,1,\ldots,n}$.

D'o l'unicit des fonctions polynmes P_n et Q_n.

Etablissons, par rcurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $P_n, Q_n \in F_n$, P_n paire et Q_n impaire, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x) \sin x + Q_n(x) \cos x.$$

On a $f_0(x) = \sin x$ donc $P_0(x) = 1$ et $Q_0(x) = 0$.

On a $f_1(x) = \sin x - x \cos x$ donc $P_1(x) = 1$ et $Q_1(x) = -x$.

On a $f_2(x) = 3 f_1(x) - x^2 \sin x = (-x^2 + 3) \sin x - 3x \cos x$ donc $P_2(x) = -x^2 + 3$ et $Q_2(x) = -3x$.

L'existence est tablie pour $n = 0, 1, 2$.

Supposons le rsultat vrai l'ordre $n \geq 2$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= (2n+1) f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x) \\ &= ((2n+1) P_n(x) - x^2 P_{n-1}(x)) \sin x + ((2n+1) Q_n(x) - x^2 Q_{n-1}(x)) \cos x. \end{aligned}$$

Ainsi $f_{n+1}(x) = P_{n+1}(x)\sin x + Q_{n+1}(x)\cos x$ avec
$P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - x^2P_{n-1}$ et $Q_{n+1}(x) = (2n+1)Q_n(x) - x^2Q_{n-1}$.
Avec les hypothses de rcurrence, on a bien $P_{n+1}, Q_{n+1} \in F_{n+1}$, P_{n+1} paire et Q_{n+1} impaire ; d'o rsultat vrai l'ordre $n+1$;

III.D.4) D'aprs l'existence et l'unicit tablies en III.D.3), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - x^2P_{n-1}(x).$$

Comme $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = 1$, on en dduit,par rcurrence immmdiate, que les fonctions P_n sont des polynômes à coefficients entiers.

III.E - On suppose que $\pi = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$.

III.E.1) P_n est un polynôme à coefficients entiers de F_n, donc $P_n(\frac{\pi}{2}) = P_n(\frac{p}{2q}) = \frac{B_n}{(2q)^n}$ avec $B_n \in \mathbb{Z}$.
Ainsi $\left((2q)^nP_n(\frac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers.

D'aprs III.B.2), on a $|f_n(\frac{\pi}{2})| \leq \dfrac{(\frac{p}{2q})^{2n}}{2.4\ldots 2n}M$ avec $M = \|\sin\|_{\infty,\mathbb{R}} = 1$.

D'aprs III.D., on a $f_n(\frac{\pi}{2}) = P_n(\frac{\pi}{2})$. Il en rsulte que $\left|(2q)^nP_n(\frac{\pi}{2})\right| \leq \dfrac{(\frac{p^2}{4q})^n}{n!}$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(2q)^nP_n(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.

III.E.2) $\left((2q)^nP_n(\frac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers convergeant vers 0, elles est donc identiquement nulle à partir d'un certain rang.
Si n_0 est le plus petit entier tel que $P_n(\frac{\pi}{2}) = 0$ pour $n \geq n_0$ alors
soit $n_0 = 0$, il y a contradiction avec $P_0(\frac{\pi}{2}) = 1$,
soit $n_0 > 0$ et l'galit de III.D.4) applique n_0 et $x = \frac{\pi}{2}$ donne $P_{n_0-1}(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc contradiction.
Ainsi π n'est pas un rationnel.

Partie IV -

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = 1$ si $\sin n \geq 0$, $a_n = 0$ sinon.
On a donc $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$,$a_6 = 0$, $a_7 = 1$, etc.

Notons que pour $n \neq 0$, on a $\sin n \neq 0$ puisque $\pi \notin \mathbb{Q}$.

IV.A - On suppose que cette suite est ultimement périodique.

IV.A.1) Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+T} = a_n.$$

On peut choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $NT \geq n_0$.
Pour tout entier k supérieur ou égal à N , on a donc $a_{kT} = a_{NT}$, ainsi $\sin(kT)$ est du signe de $\sin(NT) \neq 0$ donc de signe constant.

IV.A.2) Pour tout $k \geq N$, on a $\sin(2kT) = 2\sin(kT)\cos(kT)$ avec $\sin(kT)$ et $\sin(2kT)$ non nuls et de mme signe donc $\cos(kT) > 0$.

IV.B - Soit $G = \mathbb{Z}T + 2\pi\mathbb{Z} = \{nT + 2k\pi,\ (n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

IV.B.1) G contient 0 et pour tout $x, y \in G$, on vrifie aisment que $x - y \in G$; ainsi G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $2\pi = pa$ et $T = qa$. Comme $a \neq 0$, on en dduit que $\pi = \dfrac{pT}{2q}$ donc $\pi \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit III.E.2).

IV.B.2) On pose $G^+ = G \bigcap \mathbb{R}^{+*}$ (ensemble des éléments strictement positifs de G). G^+ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ (car G n'est pas rduit $\{0\}$) minor par 0, il possède donc une borne inférieure $a \geq 0$.

IV.B.3) On suppose que $a \in G^+$ alors $a > 0$ et, comme G est un groupe additif, $a\mathbb{Z} \subset G$.
Soit $x \in G$ et $x \neq 0$. Quitte remplacer x par $-x$, on peut supposer que $x > 0$. Notons $n = E(\frac{x}{a})$ (partie entire) alors $x = na + r$ avec $0 \leq r < a$.
On a $x \in G$ et $na \in G$ ainsi $r \in G$. Comme a est la borne inférieure de G^+, on a donc $r = 0$ et $x = na$ ainsi $G \subset a\mathbb{Z}$.
On aboutit une contradiction avec IV.B.1), a n'est donc pas élément de G^+.

IV.B.4) Supposons que $a > 0$.
On a $2a > a$ donc $2a$ n'est pas un minorant de G^+ ; il existe donc $g \in G^+$ tel que $a < g < 2a$.
De mme g n'est pas un minorant de G^+ ; il existe donc $g' \in G^+$ tel que $a < g' < g < 2a$.

On a $0 < g - g' < a$ avec $g - g' \in G^+$, ce qui contredit la dfinition de a (borne infrieure) ainsi $a = 0$.

IV.C -

IV.C.1) Comme $\inf G^+ = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in G^+$ tel que $0 < g_n < 10^{-n}$.

IV.C.2) Soit x un réel.
Si $x \in G$ alors x est limite de la suite constante de terme x.
Soit $x \notin G$ et $x > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $k_n = E(\frac{x}{g_n})$, alors $x_n = k_n.g_n \in G$ et $0 < x - x_n < g_n < 10^{-n}$.
Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'lments de G converge vers x.
Si $x < 0$, il suffit de considrer la suite $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-x$.

IV.D -

IV.D.1) D'aprs IV.C.2), pour $x = \dfrac{2\pi}{3}$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G qui converge vers x. Pour tout n, il existe deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $y_n = k_nT + l_n2\pi$. Par continuit de la fonction cosinus, on a

$$-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos y_n = \lim_{n\to+\infty} \cos(k_nT).$$

Comme la fonction cos est paire, quitte remplacer k_n par $-k_n$, on peut supposer $k_n \in \mathbb{N}$.
Finalement, il existe une suite d'entiers positifs $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\cos(k_nT))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{1}{2}$.

Si l'ensemble $\{\cos(k_nT),\ n \in \mathbb{N}\}$ a un cardinal fini, alors la suite convergente $(\cos(k_nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Il existe donc n_0 tel que $\cos(k_{n_0}T) = -\frac{1}{2}$. Ainsi il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $k_{n_0}T = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2p\pi$ ce qui implique π rationnel, d'o la contradiction.

IV.D.2) On pose $y_0 = k_0$. Comme l'ensemble $(\cos(k_nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est infini, l'ensemble des $\cos(k_nT)$ tels que $k_n > y_0$ et $n > 0$ est infini, on peut donc choisir $y_1 = k_{n_1}$ tel que $n_1 > 0$ et $y_1 > y_0$.
Supposons construit une suite strictement croissante $(y_n)_{n=0,1,2,\ldots,N}$ extraite de $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
L'ensemble des $\cos(k_nT)$ tels que $k_n > y_N$ et $n > n_N$ avec $y_N = k_{n_N}$ est encore infini, on peut donc choisir $y_{N+1} = k_{n_{N+1}}$ tel que $y_{N+1} > y_N$ et $n_{N+1} > n_N$.
On construit ainsi, par rcurrence, une suite strictement croissante $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(y_nT) = -\dfrac{1}{2}$.

IV.D.3) Il rsulte de IV.D.2) que la suite $(\cos(y_nT))_{n\in\mathbb{N}}$ a ses termes strictement ngatifs partir d'un certain rang. Comme il s'agit d'une suite extraite de $(\cos(nT))_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient une contradiction avec le rsultat IV.A.2) avec l'hypothse : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ultimement périodique.
Ainsi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique.

... FIN ...