Centrale PC 2002
Epreuve de Mathématiques 1

On désigne par $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques. Si $f \in C_{2\pi}$, ses coefficients de Fourier sont donnés pour $n \in \mathbf{Z}$ par $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$, sa série de Fourier étant $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}$.

Partie I - Définition de la fonction x

I.A. On suppose l'espace $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. On définit $T : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ par :

$T(x, x, 0) = (x, x, 0)$,

$T(x, y, z) = (x', y', z')$ où $x' = y$ et (y', z') est la projection orthogonale de $(y, -z)$ sur la droite passant par $(x, 0)$ et (y, z) si $(x, y, z) \neq (x, x, 0)$.

I.A.1) On suppose $x \neq y$, $z \neq 0$ et l'on pose $A = (x, 0)$, $B = (y, z)$, $C = (y, -z)$, $A' = (x', 0)$, $B' = (y', -z')$, $C' = (y', z')$ où $(x', y', z') = T(x, y, z)$.
Les points A', B', C' sont les pieds des hauteurs du triangle ABC.

I.A.2) Si $(x, y, z) \neq (x, x, 0)$, la droite AB est bien définie. La projection orthogonale C' de C sur la droite AB est caractérisée par les équations

$$\begin{cases} <\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{AB}> & = 0 \\ \det(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) & = 0 \end{cases}$$

Le calcul donne

$$\begin{cases} (y - x)(y - y') - z(z + z') & = 0 \\ (y - x)z' - (y' - x)z & = 0 \end{cases}$$

En utilisant $y = x'$, on obtient un système de Cramer

$$\begin{cases} (y - x)(x' - y') - zz' & = z^2 \\ z(x' - y') + (y - x)z' & = z(y - x) \end{cases}$$

ayant pour solution

$$y' - x' = -\frac{2z^2(y - x)}{(y - x)^2 + z^2}, \quad z' = z\frac{(y - x)^2 - z^2}{(y - x)^2 + z^2}.$$

I.B. Pour $t \in]0, \pi[$ on pose $X_0(t) = (0, 1, \mathrm{cotan}\, t)$ et on définit par récurrence pour $n \in \mathbf{N}$ la suite $X_n(t) = (x_n(t), y_n(t), z_n(t))$ par $X_{n+1}(t) = T(X_n(t))$.

I.B.1) Si $z_n(t) = 0$, alors, en posant $z = 0$ dans les équations de I.A.2), on obtient $y' - x' = z' = 0$, ainsi $z_{n+1}(t) = 0$ et $y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = 0$.

a) On suppose que $z_n(t) \neq 0$ pour $0 \leq n \leq N-1$ avec $N \in \mathbf{N}^*$.

On a $\dfrac{y_0(t) - x_0(t)}{z_0(t)} = \tan(t)$. Si $N = 1$ alors le résultat demandé est établi.

Si $N > 1$ supposons que

$$\frac{y_n(t) - x_n(t)}{z_n(t)} = \tan(2^n t) \qquad \text{pour } 0 \leq n < N-1,$$

alors, d'après I.A.2), on obtient

$$\frac{y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t)}{z_{n+1}(t)} = \frac{-2z_n(t)(y_n(t) - x_n(t))}{(y_n(t) - x_n(t))^2 - z_n(t)^2} = \frac{2\frac{y_n(t)-x_n(t)}{z_n(t)}}{1 - \frac{y_n(t)-x_n(t)}{z_n(t)}^2} = \tan(2(2^n t)).$$

On a donc établi, par récurrence sur n, que

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \quad \frac{y_n(t) - x_n(t)}{z_n(t)} = \tan(2^n t).$$

b) Si $z_N(t) = 0$ alors $(y_{N-1}(t) - x_{N-1}(t))^2 - (z_{N-1}(t))^2 = 0$ avec $z_{N-1}(t) \neq 0$ ainsi

$$\left(\frac{y_{N-1}(t) - x_{N-1}(t)}{z_{N-1}(t)}\right)^2 = 1$$

D'après a), on a donc $\tan^2(2^{N-1}t) = 1$. Il en résulte que

$$\cos(2^N t) = \frac{1 - \tan^2(2^{N-1}t)}{1 + \tan^2(2^{N-1}t)} = 0.$$

I.B.2) Si $t = \dfrac{\pi}{2}$, alors $z_n(t) = 0$ pour tout $n \geq 0$, ainsi $y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = 0$ et la relation demandée est vérifiée.

Si $t \neq \dfrac{\pi}{2}$ et si $z_n(t) \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, alors la relation

$y' - x' = -\dfrac{2z^2}{(y-x)^2 + z^2}(y - x) = -\dfrac{2}{1 + \left(\frac{y-x}{z}\right)^2}(y - x)$ avec $z \neq 0$ donne, par substitution,

$$y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = -2\frac{1}{1 + \tan^2(2^n t)}(y_n(t) - x_n(t)) = -2cos^2(2^n t)(y_n(t) - x_n(t)).$$

Si $t \neq \dfrac{\pi}{2}$ et si $\exists N \geq 1$ tel $z_N(t) = 0$, alors $\cos(2^N t) = 0$ et $y_{N+1}(t) - x_{N+1}(t) = 0$ donc la relation est vérifiée à l'ordre N. Et pour tout $n \geq N$, on a donc $y_n(t) - x_n(t) = 0$ d'après I.B.1), ainsi la relation reste trivialement vérifiée.

Finalement

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in]0, \pi[, \quad y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = -2cos^2(2^n t)(y_n(t) - x_n(t)).$$

I.B.3) On en déduit que :

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in]0, \pi[\quad y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = (-1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} 2\cos^2(2^k t).$$

En multipliant par $2^{n+1}\sin^2(t)$ et en utilisant le fait que $2\cos u \sin u = \cos 2u$, on obtient

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in]0, \pi[\quad 2^{n+1}\sin^2(t)(y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t)) = (-1)^{n+1}\sin^2(2^{n+1}t).$$

Sachant que $x' = y$, il vient

$$x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)) = (-1)^{n+1}\frac{\sin^2(2^{n+1}t)}{2^{n+1}\sin^2(t)}.$$

On a $x_1(t) - x_0(t)) = 1 - 0$. Finalement

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in]0,\pi[\quad x_{n+1}(t) - x_n(t)) = (-1)^n\frac{\sin^2(2^n t)}{2^n\sin^2(t)}.$$

I.B.4) On pose, pour $n \geq 0$, $u_n(t) = \sin^2(t)x_n(t)$, donc $u_0(t) = 0$ et

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in]0,\pi[\quad u_{n+1}(t) - u_n(t)) = (-1)^n\frac{\sin^2(2^n t)}{2^n}.$$

On a $u_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}(t) - u_k(t)$ et $\forall t \in]0,\pi[, \quad |u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi la suite (u_n) converge simplement sur $]0,\pi[$ vers une fonction u. De plus la série de fonctions continues $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $]0,\pi[$ ainsi u est continue sur $]0,\pi[$.

Il en résulte la suite (x_n) converge simplement vers la fonction $x : t \mapsto \dfrac{u(t)}{\sin^2(t)}$, également continue sur $]0,\pi[$.

I.B.5) La fonction u vérifie

$$\forall t \in]0,\pi[\quad u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin^2(2^n t)}{2^n}.$$

Le terme de droite est une série normalement convergente sur $\mathbf{R}$, de fonctions continues, paires, 2π-périodiques, ainsi u se prolonge sur $\mathbf{R}$ en une fonction paire et appartenant à $C_{2\pi}$.
A l'aide de la relation $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, on obtient

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2^{n+1}t)}{2^{n+1}} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(2^n t)}{2^n}.$$

Le terme de droite est une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbf{R}$, c'est donc la série de Fourier de sa somme u.

I.B.6) Si $z_0(t) = 0$ alors $z_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Si $z_0(t) \neq 0$ alors $\exists N \geq 1$ tel $z_n(t) \neq 0$ pour tout $0 \leq n \leq N-1$.

D'après I.A.2) et I.B.1)a), on a

$$z_{n+1}(t) = z_n(t)\frac{(y_n(t) - x_n(t))^2 - z_n(t)^2}{(y_n(t) - x_n(t))^2 + z_n(t)^2} = z_n(t)\frac{\tan^2(2^n t) - 1}{\tan^2(2^n t) + 1} = -z_n(t)\cos(2^{n+1}t).$$

Ainsi

$$\forall t \in]0,\pi[\quad z_{n+1}(t) = (-1)^{n+1}z_0(t)\prod_{k=0}^{n}\cos(2^{k+1}t).$$

En multipliant par $2^{n+1}\sin(2t)$ et en utilisant le fait que $2\cos u \sin u = \cos 2u$ et que $z_0(t) =$cotan(t), on obtient

$$z_{n+1}(t) = (-1)^{n+1}\frac{\sin(2^{n+2}t)}{2^{n+2}\sin^2(t)}.$$

En particulier $z_N(t) = (-1)^N \dfrac{\sin(2^{N+1}t)}{2^{n+1}\sin^2(t)}$.

On a vu que si $z_N(t) = 0$ alors $\cos(2^N t) = 0$, ainsi $\sin(2^{n+1}t) = 0$ pour tout $n \geq N$, la relation précédente reste donc valable.

Finalement, on peut regrouper tous les cas en

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in]0, \pi[\quad z_n(t) = (-1)^n \frac{\sin(2^{n+1}t)}{2^{n+1}\sin^2(t)}.$$

Il en résulte que $|z_n(t)| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}\sin^2(t)}$ pour $t \in]0, \pi[$. Ainsi, la suite z_n converge simplement vers 0 sur $]0, \pi[$.

Partie II - Etude de quelques propriétés de la fonction x

II.A. On a établi dans Partie I que

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(2^n t)}{2^n \sin^2 t}.$$

Ainsi

$$x(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{2\sin^2(\frac{\pi}{4})} = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Si $n = 2p+1$ alors $2^{2p+1}\frac{\pi}{3} = 4^p \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et si $n = 2p > 0$ alors $2^{2p}\frac{\pi}{3} = 4^p\frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}(2\pi)$ ainsi $\sin^2(2^n\frac{\pi}{3}) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

Il en résulte que $x(\dfrac{\pi}{3}) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = \frac{2}{3}$.

Pour $n \geq 1$, $t \in]0, \pi[$, on a $\sin^2(2^n(\pi - t)) = \sin^2(-2^n t) = (-\sin(2^n t))^2 = \sin^2(2^n(t))$, ainsi $x(\pi - t) = x(t)$ pour $t \in]0, \pi[$.

II.B.

II.B.1) On pose pour $n \geq 0$, $t \in]0, \pi[$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^k \sin^2\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Pour $n \geq 1$ et $t \in]0, \pi[$ on a

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad 2^n u\left(\frac{t}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin^2(2^{k-n}t)}{2^{k-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\sin^2(2^{k-n}t)}{2^{k-n}} + \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin^2(2^{k-n}t)}{2^{k-n}}$$

Avec le changement d'indice $p = n - k$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\sin^2(2^{k-n}t)}{2^{k-n}} = (-1)^n \sum_{p=1}^{n} (-1)^{-p} 2^p \sin^2\left(\frac{t}{2^p}\right) = (-1)^n \varphi_n(t).$$

De même, avec le changement d'indice $p = k - n$, on obtient

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin^2(2^{k-n}t)}{2^{k-n}} = (-1)^n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\sin^2(2^p t)}{2^p} = (-1)^n u(t).$$

Ainsi

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad 2^n u\left(\frac{t}{2^n}\right) = (-1)^n (u(t) + \varphi_n(t)).$$

II.B.2) $\varphi_n(t)$ est une somme partielle de la série de terme général $\psi_k(t) = (-1)^k 2^k \sin^2\left(\frac{t}{2^k}\right)$. On a $|\psi_k(t)| \leq \frac{t^2}{2^k}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi la suite (φ_n) converge simplement sur $]0,\pi[$ vers une fonction φ.

ψ_k est de classe C^1 sur $]0,\pi[$ avec $\psi_k'(t) = (-1)^k \sin\left(\frac{t}{2^{k-1}}\right)$.

On a $|\psi_k'(t)| \leq \frac{t}{2^{k-1}} \leq \frac{\pi}{2^{k-1}}$ pour tout $t \in]0,\pi[$.

La série des dérivées $\sum_{k\geq 1} \psi_k'$ converge normalement donc uniformément sur $]0,\pi[$. Ainsi φ est de classe C^1 sur $]0,\pi[$ avec $\varphi'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)$.

II.C.

II.C.1) On a

$$\alpha_n = 2^{-2n} x\left(\frac{\pi/4}{2^{2n}}\right) = \frac{2^{2n} u\left(\frac{\pi/4}{2^{2n}}\right)}{2^{4n}\sin^2\left(\frac{\pi/4}{2^{2n}}\right)} = \frac{u(\pi/4) + \varphi_{2n}(\pi/4)}{2^{4n}\sin^2\left(\frac{\pi/4}{2^{2n}}\right)}.$$

On a $u(\pi/4) = 0$ d'après II.A.

On a $\displaystyle\frac{1}{2^{4n}\sin^2\left(\frac{\pi/4}{2^{2n}}\right)} \overset{n\mapsto+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2$ et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \varphi_{2n}(\pi/4) = \varphi(\pi/4)$

Ainsi la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente , de limite $\alpha = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \varphi(\pi/4)$.

De même, on a

$$\beta_n = 2^{-(2n+1)} x\left(\frac{\pi/4}{2^{2n+1}}\right) = \frac{2^{2n+1} u\left(\frac{\pi/4}{2^{2n+1}}\right)}{2^{2n+1}\sin^2\left(\frac{\pi/4}{2^{2n+1}}\right)} = -\frac{u(\pi/4) + \varphi_{2n+1}(\pi/4)}{2^{4n+2}\sin^2\left(\frac{\pi/4}{2^{2n+1}}\right)} = -\frac{\varphi_{2n+1}(\pi/4)}{2^{4n+2}\sin^2\left(\frac{\pi/4}{2^{2n+1}}\right)}.$$

On a $\displaystyle\frac{1}{2^{4n+2}\sin^2\left(\frac{\pi/4}{2^{2n+1}}\right)} \overset{n\mapsto+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2$ et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \varphi_{2n}(\pi/4) = \varphi(\pi/4)$

Ainsi la suite $(\beta_n)_n$ est convergente , de limite $\beta = -\alpha$.

Comme α est la somme d'une série, on calcule une valeur approchée à 10^{-3} près, à l'aide d'une somme partielle, en majorant un reste par 10^{-3}.

On a $\alpha = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-2)^k \sin^2\left(\frac{\pi}{4\times 2^k}\right)$ donc $\left|\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-2)^k \sin^2\left(\frac{\pi}{4\times 2^k}\right)\right| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$.

Il suffit de choisir $n = 10$ pour obtenir, avec $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{10} (-2)^k \sin^2\left(\frac{\pi}{4\times 2^k}\right)$ une valeur approchée à 10^{-3} près. Le calcul machine donne $\alpha \simeq -0,311$.

II.C.2) On a $x\left(\dfrac{\pi}{2^{2n}}\right) = \alpha_{n-1} 2^{2n-2}$ avec $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \alpha_n = \alpha < 0$ et $x\left(\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}\right) = \beta_{n-1} 2^{2n-1}$ avec $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \beta_n = \beta > 0$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n}}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}\right) = +\infty$.

Il existe donc un entier n_0, tel que $x\left(\frac{\pi}{2^{2n}}\right) < 0$ et $x\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}\right) > 0$ pour tout $n \geq n_0$.

La fonction est continue sur $]0,\pi[$, il existe donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $t_n \in \left]\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}, \dfrac{\pi}{2^{2n}}\right[$ tel que $x(t_n) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Il existe donc une suite de nombres $t_n \in]0,\pi[$ convergeant vers 0 telle que $x(t_n) = 0$.

Partie III:- Séries de Fourier lacunaires

III.A.

III.A.1) Pour $t \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, un calcul de somme géométrique donne

$$D_N(t)=\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}=e^{-iNt}\sum_{k=0}^{2N} e^{ikt}=e^{-iNt}\frac{1-e^{i(2N+1)t}}{1-e^{it}}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

III.A.2) La fonction $\dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ étant prolongeable par continuité en 0, on peut écrire

$$I_N=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)^4\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^4\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt.$$

En utilisant l'inégalité $|\sin\left(\frac{t}{2}\right)|\leq|\frac{t}{2}|$, on obtient l'inégalité demandée

$$I_N\geq\frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^4\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t^4}\,dt.$$

Le changement de variable $\theta=\left(N+\frac{1}{2}\right)t$ donne

$$I_N\geq\frac{8}{\pi}\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)^4}{N}\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\,d\theta\geq\frac{8}{\pi}N^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\,d\theta.$$

En posant $C=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\,d\theta$, on obtient une constante $C>0$ telle que $\forall N\geq 0,\ I_N\geq CN^3$.

On a $C>0$ car la fonction $\theta\mapsto\dfrac{\sin^4\theta}{\theta^4}$ est positive continue, non identiquement nulle sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

III.B.

III.B.1) Pour $n\geq 0$, $t\in\mathbf{R}$ on pose $v_n(t)=2a_n\cos 2^n t$ avec $a=(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|a_n|<+\infty$.

Il en résulte que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série trigonométrique convergeant normalement (donc simplement) sur $\mathbf{R}$ vers une fonction $v\in C_{2\pi}$. C'est donc la série de Fourier de sa somme v.

III.B.2) On suppose désormais que v est dérivable en t_0.
Soit $H_{n_0}(t)=e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}[v(t+t_0)-v(t_0)\cos t-v'(t_0)\sin t]$. pour $n_0\geq 1$.
$H_{n_0}\in C_{2\pi}$ comme somme et produit de fonctions de $C_{2\pi}$.
Un calcul immédiat donne $H_{n_0}(0)=e^{-i2^{n_0}t_0}[v(t_0)-v(t_0)]=0$
Pour $t\neq 0$, on a $\dfrac{H_{n_0}(t)-H_{n_0}(0)}{t}=e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}[\dfrac{v(t+t_0)-v(t_0)}{t}+v(t_0)\dfrac{1-\cos t}{t}-v'(t_0)\dfrac{\sin t}{t}]$.
En utilisant les résultats $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0}\frac{v(t+t_0)-v(t_0)}{t}=v'(t_0)$, $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0}\frac{1-\cos t}{t}=0$ et $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0}\frac{\sin t}{t}=1$, on obtient $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0}\frac{H_{n_0}(t)-H_{n_0}(0)}{t}=e^{-i2^{n_0}t_0}[v'(t_0)+0-v'(t_0)]=0$.
Ainsi H_{n_0} est dérivable en 0 et $H'_{n_0}(0)=0$.

III.B.3) Pour simplifier les calculs, on note

$$H_{n_0}(t) = W(t) - Z(t)$$

où $W(t) = v(t+t_0)e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}$ et $Z(t) = (v(t_0)\cos t + v'(t_0)\sin t)e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}$.

Par linéarité, on a $\widehat{H_{n_0}}(k) = \widehat{W}(k) - \widehat{Z}(k)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Z est le polynôme trigonométrique

$$Z(t) = \left(\frac{v(t_0)}{2} + \frac{v'(t_0)}{2i}\right) e^{-i2^{n_0}t_0} e^{i(1-2^{n_0})t} + \left(\frac{v(t_0)}{2} - \frac{v'(t_0)}{2i}\right) e^{-i2^{n_0}t_0} e^{-i(1+2^{n_0})t}$$

ainsi $\widehat{Z}(1-2^{n_0}) = \left(\frac{v(t_0)}{2} + \frac{v'(t_0)}{2i}\right) e^{-i2^{n_0}t_0}$, $\widehat{Z}(-1-2^{n_0}) = \left(\frac{v(t_0)}{2} - \frac{v'(t_0)}{2i}\right) e^{-i2^{n_0}t_0}$ et les autres $\widehat{Z}(k)$ sont nuls, en particulier $\widehat{Z}(0) = 0$.

On a $\widehat{W}(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} v(t+t_0)e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}\,dt.$

Le changement de variable $\theta = t + t_0$ et la 2π-périodicité donnent successivement

$$\begin{aligned}
\widehat{W}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+t_0}^{\pi+t_0} v(\theta)e^{-i2^{n_0}\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\theta)e^{-i2^{n_0}\theta}\,d\theta \\
&= \widehat{v}(2^{n_0}) = a_{n_0}
\end{aligned}$$

Ainsi $\widehat{H_{n_0}}(0) = a_{n_0}$.

Précisons les autres coefficients de Fourier de la fonction $W : t \mapsto e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}v(t+t_0)$.

Ils apparaissent dans l'écriture suivante

$$W(t) = e^{-i2^{n_0}(t+t_0)} \sum_{n\geq 0} a_n e^{i2^n(t+t_0)} + a_n e^{-i2^n(t+t_0)} = \sum_{n\geq 0} a_n e^{i(2^n-2^{n_0})(t+t_0)} + \sum_{n\geq 0} a_n e^{-i(2^n+2^{n_0})(t+t_0)}.$$

Le plus petit $k > 0$ tel que $\widehat{W}(k)$ puisse être non nul provient de $n = n_0 + 1$ dans la première somme, c'est donc $k = 2^{n_0+1} - 2^{n_0} = 2^{n_0}$.

Le plus grand $k < 0$ tel que $\widehat{Wk}(k)$ puisse être non nul provient de $n = n_0 - 1$ dans la première somme (tous les k de la seconde somme sont des négatifs plus petits que ceux de la première somme), c'est donc $k = 2^{n_0-1} - 2^{n_0} = -2^{n_0-1}$.

Ainsi $\widehat{W}(k) = 0$ pour $k \in \mathbf{Z}^* \bigcap [-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]$.

Comme $\widehat{Z}(k)$ ne peut être non nul que pour les entiers $k = 1 - 2^{n_0}$ et $k = -1 - 2^{n_0}$, extérieurs à l'intervalle $[-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]$, il en résulte que $\widehat{H_{n_0}}(k) = 0$ pour $k \in \mathbf{Z}^* \bigcap [-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]$.

III.C. On suppose désormais $n_0 \geq 6$. Soit $N = 2^{n_0-4}$ et $g_N(t) = I_N^{-1} D_N(t)^4$.

III.C.1) On a $D_N(t) = \displaystyle\sum_{j=-N}^{N} e^{ijt}$ donc le calcul de la puissance 4 donne

$$g_N(t) = \sum_{j=-4N}^{4N} \alpha_j e^{ijt} \text{ où } \alpha_j \in \mathbf{C} \text{ pour } j \in [-4N, 4N].$$

En particulier $\alpha_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g_N(t)\,dt = \dfrac{1}{2\pi I_N}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)^4\,dt = \dfrac{I_N}{I_N} = 1.$

III.C.2) Le calcul donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_{n_0}(t)g_N(t)\,dt = \sum_{j=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha_j H_{n_0}(t)e^{ijt}\,dt = \sum_{j=-N}^{N}\alpha_j 2\pi\widehat{H_{n_0}}(-j).$$

Pour $n_0 \geq 6$, on a $4N = 2^{n_0-2} \leq 2^{n_0}-1$ et $-4N = -2^{n_0-2} \geq -2^{n_0-1}+1$. Il en résulte, d'après III.B.3),

$$\int_{-\pi}^{\pi} H_{n_0}(t)g_N(t)\,dt = \alpha_0 2\pi\widehat{H_{n_0}}(0) = 2\pi a_{n_0}.$$

III.D. On pose $K(t) = \left|\dfrac{H_{n_0}(t)}{t}\right|$ si $t \in [-\pi,\pi]\backslash\{0\}$, $K(t)=0$ si $t=0$ ou $|t|>\pi$.
Comme $|H_{n_0}(t)| = |v(t+t_0) - v(t_0)\cos t - v'(t_0)|$, on constate que la fonction K ne dépend pas de n_0.

III.D.1) $\dfrac{H_{n_0}(t)}{t}$ est une fonction continue sur $[-\pi,\pi]\backslash\{0\}$ et $K(t) = \left|\dfrac{H_{n_0}(t)-H_{n_0}(0)}{t}\right| \to |H'_{n_0}(0)| = 0$ lorsque t tend vers 0.Ainsi

$$\lim_{t\mapsto 0} K(t) = 0.$$

K se prolonge donc par continuité sur $[-\pi,\pi]$, elle donc bornée sur $[-\pi,\pi]$, et donc sur $\mathbf{R}$ (puisque nulle à l'extérieur de $[-\pi,\pi]$).

III.D.2) D'après III.C.2), on a

$$2^{n_0}|a_{n_0}| = \frac{8N}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} H_{n_0}(t)g_N(t)\,dt\right|.$$

En exprimant $g_N(t)$, on obtient

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq \frac{8N}{\pi I_N}\int_{-\pi}^{\pi}|H_{n_0}(t)|\,D_N^4(t)\,dt.$$

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq \frac{8N}{\pi I_N}\int_{-\pi}^{\pi} K(t)|t|\frac{\sin^4\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt.$$

Par convexité, on a $|\sin\theta| \geq \frac{2}{\pi}|\theta|$ pour $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$, ainsi

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq \frac{8N\pi^3}{I_N}\int_{-\pi}^{\pi} K(t)\frac{\sin^4\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{|t|^3}\,dt.$$

On effectue le changement de variable $\theta = \left(N+\frac{1}{2}\right)t$

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq \frac{8N\pi^3\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}{I_N}\int_{-\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} K\left(\frac{\theta}{N+\frac{1}{2}}\right)\frac{\sin^4\theta}{|\theta|^3}\,d\theta.$$

Finalement, on minore I_N d'après III.A.2)

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq \frac{8\pi^3\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}{CN^2}\int_{-\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} K\left(\frac{\theta}{N+\frac{1}{2}}\right)\frac{\sin^4\theta}{|\theta|^3}\,d\theta.$$

Notons f_{n_0} la fonction positive définie sur $\mathbf{R}$ par $f_{n_0}(t) = K\left(\dfrac{t}{N+\frac{1}{2}}\right)\dfrac{\sin^4 t}{|t|^3}$. La fonction $\Psi : t \mapsto \sup_{\theta\in\mathbf{R}^+}|K(\theta)|\dfrac{\sin^4 t}{|t|^3}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et domine chacune des fonctions f_{n_0}. Ainsi

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq \frac{8\pi^3\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}{CN^2}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{\theta}{N+\frac{1}{2}}\right)\frac{\sin^4\theta}{|\theta|^3}\,d\theta.$$

D'après le choix des n_0, on a $\left(1+\frac{1}{N}\right)^2 \leq \dfrac{25}{16}$. Il suffit alors de considérer $C' = \frac{25\pi^3}{2C} > 0$, pour obtenir

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq C' \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t}{N+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin^4 t}{|t|^3}\, dt.$$

III.D.3) D'après III.D.1), on a $\displaystyle\lim_{n_0 \to +\infty} K\left(\frac{t}{N+\frac{1}{2}}\right) = 0$. Ainsi la suite de fonctions f_{n_0} converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction 0.
La majoration de la suite de fonctions (f_{n_0}), permet d'utiliser le théorème de convergence dominée. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n_0 \to +\infty} 2^{n_0} a_{n_0} = 0$.

Partie IV -

Si la fonction x est dérivable en un point $t_0 \in]0, \pi[$, alors u est également dérivable en t_0.
On a, d'après I.B.5), $u(t) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2^n t)}{2^n}$.
u est donc une série de Fourier lacunaire avec $a_0 = \dfrac{1}{6}$ et $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ pour $n \geq 1$.
$2^n a_n = \frac{(-1)^n}{2}$ n'est pas le terme d'une suite convergente, ce qui contredit le résultat [III.D.3).
Ainsi la fonction x n'est dérivable en aucun point de $]0, \pi[$.

——— FIN ———