Concours Centrale-Supélec 2000

Maths 2 - PC

Partie I - Propriétés de la transformée de Legendre.

Pour $f : I \to \mathbf{R}$ et $p \in \mathbf{R}$ on désigne par d_p la fonction $x \in I \to px - f(x)$.
On note $J(f) = \{p \in \mathbf{R} \,/\, d_p \text{ majorée sur } I\}$ et on appelle *transformée de Legendre* de f, la fonction g (notée $\mathcal{L}(f)$) définie par

$$\forall p \in J(f), \quad g(p) = \sup_{x \in I} d_p(x).$$

I.A - Exemples

I.A.1) Soit $f(x) = kx^2$ avec $k > 0$ et $I = \mathbf{R}$.

La fonction d_p a pour dérivée $d'_p(x) = p - 2kx$, d'où son tableau de variations

x	$-\infty$		$\frac{p}{2k}$		$+\infty$
$d'_p(x)$		$+$	0	-	
d_p			$\frac{p^2}{4k}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

Il en résulte que $J(f) = \mathbf{R}$ et $\mathcal{L}(f) : p \to \dfrac{p^2}{4k}$

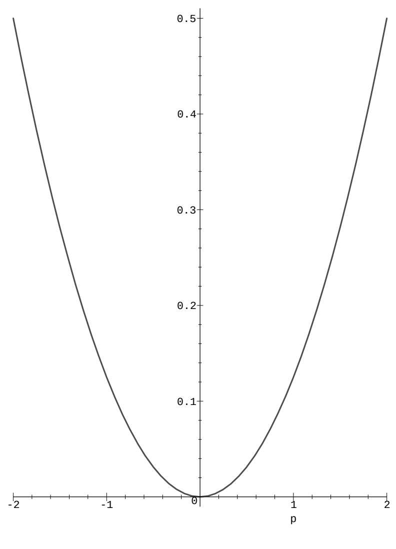

FIG. 1 – *graphe de* $\mathcal{L}(f)$

I.A.2) Soit $f(x) = e^x$ et $I = \mathbf{R}$.

Pour $p < 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} d_p(x) = +\infty$.

Pour $p = 0$, on a $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} d_p(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} d_p(x) = 0$.

Pour $p > 0$, on a $d'_p(x) = p - e^x$, d'où le tableau de variations de d_p

x	$-\infty$		$\ln(p)$		$+\infty$
$d'_p(x)$		$+$	0	-	
d_p	$-\infty$	$\nearrow$	$p\ln(p)-p$	$\searrow$	$-\infty$

Il en résulte que $J(f)=\mathbf{R}^+$ et $\mathcal{L}(f) : p \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } p=0 \\ p\ln(p)-p & \text{si } p>0 \end{cases}$

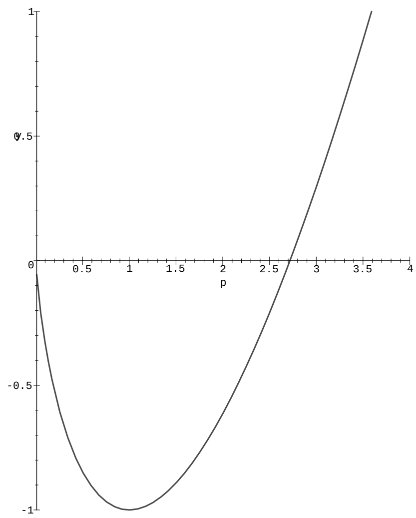

FIG. 2 – *graphe de* $\mathcal{L}(f)$

I.A.3) Soit $f(x)=\text{Arctan}(x)$ et $I=\mathbf{R}$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} d(x)=+\infty$ si $p<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x)=+\infty$ si $p>0$.
Il en résulte que $J(f)=\{0\}$ et $\mathcal{L}(f)(0)=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}(-\text{Arctan}(x))=\dfrac{\pi}{2}$.

I.B - Etude générale

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ tel que $J(f)\neq\emptyset$.

I.B.1) Pour a et b dans $J(f)$ et $t\in[0,1]$, on a $d_{ta+(1-t)b}(x)=td_a(x)+(1-t)d_b(x)$, ainsi la fonction $d_{ta+(1-t)b}$ est majorée sur I et donc $ta+(1-t)\in J(f)$.
Il en résulte que $J(f)$ est un intervalle.

I.B.2) Avec les hypothèse de I.B.1), on a

$$\forall x\in I,\quad d_{ta+(1-t)b}(x)\leq t\sup_{x\in I} d_a(x)+(1-t)\sup_{x\in I} d_b(x)$$

ainsi $g(ta+(1-t)b)\leq tg(a)+(1-t)g(b)$.
Il en résulte que $g=\mathcal{L}(f)$ est une fonction convexe sur $J(f)$.

I.B.3)

a) Si $I\subset\mathbf{R}^+$, pour $p_1\leq p_2$ et $x\in I$, on a $d_{p_1}(x)\leq d_{p_2}(x)$. $g=\mathcal{L}(f)$ est donc une fonction croissante sur $J(f)$.

b) Si $I\subset\mathbf{R}^+$, pour $p_1\leq p_2$ et $x\in I$, on a $d_{p_1}(x)\geq d_{p_2}(x)$. $g=\mathcal{L}(f)$ est donc une fonction décroissante sur $J(f)$.

I.C - Etude d'un cas particulier

Soit $f\in C^2(I,\mathbf{R})$ telle que : $\forall x\in I,\ f''(x)>0$. On note α et β les extrémités de l'intervalle $f'(I)$.

I.C.1) Pour $p \in]\alpha, \beta[$, la fonction d_p a pour dérivée $d'_p(x) = p - f'(x)$. f' étant strictement croissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x \in I$, noté $x(p)$, tel que $f'(x) = p$, d'où le tableau de variations

x			$x(p)$		
$d'_p(x)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	-
			$g(p)$		
d_p		$\nearrow$		$\searrow$	

Il en résulte que $p \in J(f)$, ainsi $]\alpha, \beta[\subset J(f)$, et

$$\forall p \in]\alpha, \beta[, \quad g(p) = px(p) - f(x(p)) \;\text{ où }\; x(p) = (f')^{-1}(p).$$

I.C.2) La fonction x est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$, ainsi g est de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ et un calcul immédiat donne

$$\forall p \in]\alpha, \beta[, \quad g'(p) = x(p).$$

I.C.3) Pour $p \in]\alpha, \beta[$, la tangente D_p au point d'abscisse $x(p)$ au graphe de f a pour équation $y - f(x(p)) = f'(x(p))(x - x(p))$. Sachant que $f'(x(p)) = p$, on obtient

$$y = px - g(p).$$

I.C.4) On note $\mathcal{H} = \{h \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \;/\; \forall x \in \mathbf{R},\ h''(x) > 0 \text{ et } h'(\mathbf{R}) = \mathbf{R}\}$.

a) Soit $h \in \mathcal{H}$ et $g = \mathcal{L}(h)$.
D'après I.C.1), on a $J(h) = \mathbf{R}$ et d'après I.C.2), on a $g' = x = (h')^{-1}$ ainsi g' est un C^1- difféomorphisme de $\mathbf{R}$ et $g \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Il en résulte que $g \in \mathcal{H}$ et donc $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$.

b) Soit $h \in \mathcal{H}$ et $g = \mathcal{L}(h)$. D'après a), on peut définir $g_1 = \mathcal{L}(g)$

$$\forall p \in \mathbf{R}, \quad g_1(p) = px_1(p) - g(x_1(p)) \;\text{ où }\; x_1(p) = (g')^{-1}(p).$$

D'après I.C.2), on a ${g_1}' = (g')^{-1} = h'$.
Par ailleurs, comme $x_1(x(p)) = p$, on a $g_1(x(p)) = x(p)p - g(p) = h(x(p))$.
Il en résulte que $g_1(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ ou encore $\mathcal{L}(\mathcal{L}(h)) = h$.

c) D'après b), $\mathcal{L}$ est une involution de $\mathcal{H}$: c'est donc une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$.

Partie II - Généralisation aux fonctions de plusieurs variables.

Soit $f : E \to \mathbf{R}$ où E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire habituel, telle que pour tout $p \in E$, l'application $x \in E \to \langle p, x \rangle - f(x)$ soit majorée. On appelle *transformée de Legendre* de f, l' application $g = \mathcal{L}(f)$ définie sur E par $g(p) = \sup\limits_{x \in E}(\langle p, x \rangle - f(x))$.

II.1) Soit $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_i)_{1 \le i \le n}$ la base orthonormale canonique de E.
Soit $p \in E$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive ayant pour valeurs propres (strictement positives) $\{\lambda_i \;/\; i \in [1, n]\}$. On note $F(x) = \langle p, x \rangle - f(x)$ où $f(x) = {}^tXAX$.
Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ de E telle que

$${}^tRAR = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{où } R = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \in O_n(\mathbf{R}).$$

Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $f(x) = {}^tY\Lambda Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.

On a $p = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i$ et $\langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} q_i y_i$. Ainsi

$$F(x) = F_1(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i y_i - \lambda_i y_i^2.$$

D'après I.A.1), chacune des n fonctions $y_i \to q_i y_i - \lambda_i y_i^2$ est majorée sur $\mathbf{R}$ par $\frac{{q_i}^2}{4\lambda_i}$, ainsi F est majorée sur E par $\sum_{i=1}^{n} \frac{{q_i}^2}{4\lambda_i}$, ce qui assure l'existence de $g = \mathcal{L}(f)$.

Pour $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ où $y_i = \frac{q_i}{2\lambda_i}$, on a $F(x) = F_1(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{{q_i}^2}{4\lambda_i}$, ainsi F atteint sa borne supérieure.

II.2) Pour $p = (p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i$, on a $P = RQ$ où $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Un calcul matriciel simple donne

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{q_i}^2}{4\lambda_i} = {}^tQ \begin{pmatrix} \frac{1}{4\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{4\lambda_n} \end{pmatrix} Q = {}^tPBP$$

avec

$$B = \frac{1}{4} R \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} R^{-1} = \frac{1}{4} A^{-1}$$

Il en résulte que

$$\forall p \in E, \quad g(p) = {}^tPBP \ \text{ où } \ B = \frac{1}{4} A^{-1}.$$

De même, la fonction $h = \mathcal{L}(g)$ s'exprime par

$$\forall p \in E, \quad h(p) = {}^tPCP \ \text{ où } \ C = \frac{1}{4} B^{-1}.$$

De l'égalité $C = A$, on tire $h = f$ ou encore $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f)) = f$.

II.3)

a) Pour $p \in E$ et $t > 0$, le vecteur colonne associé à tp est tP, donc

$$f(tp) = {}^t(tP)A(tP) = t^2\, {}^tPCP = t^2 f(p)$$

b) La dérivation de l'application composée $t \to tp \to f(tp)$ donne

$$\frac{d}{dt} f(tp) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}(tp) \frac{d}{dt}(tp_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(tp)$$

Le calcul en $t = 1$, combiné avec a), donne

$$\forall p \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(p) = 2f(p)$$

II.4) Pour $p \in E$ fixé, la fonction F (de classe C^1 sur E) atteint son maximum en un point critique ξ. Il vérifie donc $(\text{grad } F)(\xi) = 0$.
Le calcul donne $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x) = p_i - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, ainsi $(\text{grad } f)(\xi) = p$.
En utilisant ce qui précède et II.3)b), on obtient $\langle p, \xi \rangle = \langle (\text{grad } f)(\xi), \xi \rangle = 2f(\xi)$.
Or $g(p) = F(\xi) = \langle p, \xi \rangle - f(\xi)$, ainsi, il existe $x(p) \in E$ (prendre $x(p) = \xi$) tel que $g(p) = f(x(p))$.
Notons que, d'après l'étude faite en II.1), ξ est unique : c'est le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{2\lambda_i} e_i$.

Partie III - Problème d'optimisation.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive ayant pour valeurs propres (positives ou nulles) $\{\lambda_i \ / \ i \in [1, n]\}$. Pour $p \in E$, on note $F(x) = \langle p, x \rangle - f(x)$ où $f(x) = {}^tXAX$.
Pour C, partie fermée, non vide, convexe de E , on note $M = \{x \in C \ / \ F(x) = \sup\limits_{y \in C} F(y)\}$.

III.A - Convexité de M

III.A.1) Pour x_1 et x_2 dans C et $t \in [0, 1]$, on a $x = tx_1 + (1-t)x_2 \in C$ puisque C est convexe. Le calcul donne

$$\begin{aligned}
F(x) &= t\langle p, x_1 \rangle + (1-t)\langle p, x_2 \rangle - t^2 \, {}^tX_1AX_1 - (1-t)^2 \, {}^tX_2AX_2 - 2t(1-t) \, {}^tX_1AX_2 \\
&= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + (t - t^2) \, {}^tX_1AX_1 + ((1-t) - (1-t)^2) \, {}^tX_2AX_2 - 2t(1-t) \, {}^tX_1AX_2 \\
&= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t) \, ({}^tX_1AX_1 + {}^tX_2AX_2 - 2{}^tX_1AX_2) \\
&= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t) \, {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)
\end{aligned}$$

III.A.2) On suppose $M \neq \emptyset$. Soient x_1 et x_2 dans M, $t \in [0, 1]$ et $x = tx_1 + (1-t)x_2$.
A étant symétrique positive, on a ${}^tYAY \geq 0$ pour tout vecteur colonne Y. D'après III.A.1), on a donc $F(x) \geq tF(x_1) + (1-t)F(x_2)$.
Des égalités $F(x_1) = F(x_2) = \sup\limits_{y \in C} F(y)$, on déduit $F(x) \geq \sup\limits_{y \in C} F(y)$ et donc $F(x) = \sup\limits_{y \in C} F(y)$.
Il en résulte que $x \in M$ ainsi M est convexe.

III.B - Cas particulier

III.B.1) Dans cette questiion, A étant définie positive, on a $k = \min\limits_{i \in [1,n]} \lambda_i > 0$.
Avec les notations de II.1), pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a ${}^tXAX = {}^tY\Lambda Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq k \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ ainsi

$$\forall x \in E, \quad {}^tXAX \geq k \, {}^tXX.$$

III.B.2) On choisit $x_0 \in C$ et on note $C_1 = \{x \in C \ / \ F(x) \geq F(x_0)\}$, ainsi

$$M = \{x \in C_1 \ / \ F(x) = \sup_{y \in C_1} F(y)\}.$$

On a $C_1 = C \bigcap F^{-1}([F(x_0), +\infty[)$ et F continue sur E, ainsi C_1 est un fermé (non vide) de E.
Pour tout $x \in C_1$, on a ${}^tPX - {}^tXAX \geq F(x_0)$ donc ${}^tPX - F(x_0) \geq {}^tXAX$.
En utilisant III.B.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|p\| \, \|x\| - F(x_0) \geq {}^tPX - F(x_0) \geq {}^tXAX \geq k\|x\|^2$$

Il en résulte que l'équation du second degré $ku^2 - \|p\|u + F(x_0) = 0$ a des racines réelles et que $\|x\|$ est compris entre ces racines.
Finalement, C_1 est un fermé borné de E donc un compact. L'application continue F atteint son maximum sur C_1 et assure ainsi la non vacuité de M.

III.B.3) Soient x_1 et x_2 dans M. L'élément $x = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$ appartient donc au convexe M.

D'après III.A.1), appliqué à x, on obtient $\sup\limits_{y\in C} F(y) = 2\dfrac{1}{2}\sup\limits_{y\in C} F(y) + \dfrac{1}{4}\,{}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)$.

A étant définie positive, ${}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) = 0$ implique $x_1 - x_2 = 0$.

Il en résulte que M ne contient qu'un seul élément.

III.C - Une caractérisation des points de M

III.C.1) A étant positive, avec les notations de III.A.1), on a

$$F(x) - F(x_2) = t(F(x_1) - F(x_2) + {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)) - t^2\,{}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2).$$

En remplaçant $F(x_1)$ et $F(x_2)$ par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned} &F(x_1) - F(x_2) + {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \\ &= {}^tP(X_1 - X_2) - {}^tX_1AX_1 + {}^tX_2AX_2 + {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \\ &= {}^tP(X_1 - X_2) - 2\,{}^tX_2A(X_1 - X_2) \\ &= {}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2) \end{aligned}$$

D'où la relation demandée

$$F(x) - F(x_2) = t\,{}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2) - t^2\,{}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2).$$

III.C.2) Soit $x \in M$. Pour tout $y \in C$ et $t \in [0,1]$, on a $z = ty + (1-t)x \in C$ donc $F(z) - F(x) \leq 0$.

D'après III.C.1), on a $F(z) - F(x) = t\,{}^t(P - 2AX)(Y - X) - t^2\,{}^t(Y - X)A(Y - X)$, ce qui entraîne ${}^t(P - 2AX)(Y - X) - t\,{}^t(Y - X)A(Y - X) \leq 0$ pour tout $t \in]0,1]$.

Si ${}^t(P - 2AX)(Y - X)\rangle 0$, on peut obtenir ${}^t(P - 2AX)(Y - X) - t\,{}^t(Y - X)A(Y - X)) > 0$ en choisisant $t > 0$ et suffisamment petit. Il en résulte que

$$x \in M \Rightarrow \Big(x \in C \ \text{ et } \ \forall y \in C,\ {}^t(P - 2AX)(Y - X) \leq 0\Big).$$

Inversement, soit $x \in C$ tel qu'on ait ${}^t(P - 2AX)(Y - X) \leq 0$ pour tout $y \in C$.

En utilisant III.C.1) et le fait que A soit positive, on obtient

$$F(y) - F(x) = {}^t(P - 2AX)(Y - X) - \ {}^t(Y - X)A(Y - X) \leq {}^t(P - 2AX)(Y - X) \leq 0$$

Il en résulte que $x \in M$.

La caractérisation trouvée s'écrit également

$$\forall y \in C,\ \langle(\mathrm{grad}F)(x), y - x\rangle \leq 0.$$

III.D - Cas où C est borné

On suppose $C \subset B_f(O, R)$.

III.D.1) C est un fermé borné donc un compact. Comme au III.B.2), la continuité de F assure la non vacuité de M.

Lorsque A n'est pas définie positive, M peut avoir plus d'un élément. Par exemple, soit $A = 0$, $p = (1, 0, \ldots, 0)$ et $C = [0,1]^n$ avec $n \geq 2$. On a $F(x) = \langle p, x\rangle = x_1$ ainsi $M = \{1\} \times [0,1]^{n-1}$ a une infinité d'éléments.

III.D.2) La caractérisation des applications linéaires continues assure l'existence de $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in E,\ \|AX\| \leq \alpha\|X\|.$$

Précisons la démonstration dans le contexte euclidien, avec les notations de II.1).

Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\|AX\|^2 = {}^tXA^2X = {}^tY\Lambda^2Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 y_i^2$.

En notant $\alpha = \sqrt{\max_{i \in [1,n]} \lambda_i^2}$, on obtient

$$\|AX\|^2 \leq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \alpha^2 \|X\|^2$$

d'où la relation demandée.

III.D.3) Soir r tel que $r > \sup\{6\alpha R^2, 2R(\|p\| + 2\alpha R)\}$.

a) Soit $m \in \mathbf{N}$ et $u_m \in C$.

L'application $x \to \langle -(\mathrm{grad} F)(u_m), x \rangle$ étant continue, atteint sa borne inférieure sur C. Ainsi il existe $v_m \in C$ tel que $\forall x \in C$, $\langle -(\mathrm{grad} F)(u_m), v_m \rangle \leq \langle -(\mathrm{grad} F)(u_m), x \rangle$ qui s'écrit matriciellement

i) $\forall x \in C, \quad {}^t(2AU_m - P)V_m \leq {}^t(2AU_m - P)X.$

b) Il résulte de i) que ${}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m) \geq 0$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et III.D.2), on obtient

$$\begin{aligned} {}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m) &\leq \|P - 2AU_m\| \|V_m - U_m\| \\ &\leq (\|P\| + 2\alpha \|U_m\|)(\|V_m\| + \|U_m\|) \\ &\leq 2R((\|P\| + 2\alpha R) \leq r. \end{aligned}$$

Ainsi le réel t_m défini par

ii) $t_m = \frac{1}{r} {}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m),$

vérifie $t_m \in [0, 1]$.

c) Soit u_{m+1} défini par

iii) $u_{m+1} = u_m + t_m(v_m - u_m),$

alors par convexité de C, $u_{m+1} = t_m v_m + (1 - t_m)u_m$ est dans C.

Pour $u_0 \in C$, les questions a), b) et c) permettent de définir, à partir des trois relations i), ii) et iii), $v_0 \in C$, $t_0 \in [0, 1]$ et $u_1 \in C$. Par récurrence sur m, à partir de u_m, on définit $v_m \in C$, $t_m \in [0, 1]$ et $u_{m+1} \in C$,

d'où la définition, à partir de $u_0 \in C$, des suites (u_m) et (v_m) de C et de la suite (t_m) de $[0, 1]$.

III.D.4) En utilisant ii) et III.C.1) avec $x_2 = u_m$ et $x = u_{m+1}$, on obtient

$$\begin{aligned} F(u_{m+1}) - F(u_m) &= t_m \, {}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m) - {t_m}^2 \, {}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m) \\ &= {t_m}^2(r - {}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m)) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a ${}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m) \leq \alpha \|V_m - U_m\|^2 \leq 4\alpha R^2 \leq r$. Il en résulte que $(F(u_m))$ est une suite réelle croissante. Etant majorée par $\sup_{y \in C} F(y)$, elle est donc convergente.

On a $r - 4\alpha R^2 > 0$ même si $\alpha = 0$. Ainsi la relation précédente et la convergence de la suite $(F(u_m))$ impliquent que $\lim_{m \to +\infty} t_m = 0$.

Par ailleurs, (u_m) et (v_m) sont deux suites du compact C, il existe donc $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante tel que les suites extraites $(u_{\varphi(m)})$ et $(v_{\varphi(m)})$ convergent dans C vers u et v respectivement.

Le passage à la limite, avec les relation i) et ii)

$$\forall x \in C, \quad {}^t(2AU_{\varphi(m)} - P)V_{\varphi(m)} \leq {}^t(2AU_{\varphi(m)} - P)X,$$

$$t_{\varphi(m)} = \frac{1}{r} {}^t(P - 2AU_{\varphi(m)})(V_{\varphi(m)} - U_{\varphi(m)}),$$

donne

$$\forall x \in C, \quad {}^t(2AU - P)V \leq {}^t(2AU - P)X \quad \text{ et } \quad {}^t(P - 2AU)(V - U) = 0$$

Il en résulte que $\forall x \in C$, ${}^t(2AU - P)U \leq {}^t(2AU - P)X$ ainsi, d'après III.C.2), $u \in M$.
