

# Concours Commun Polytechnique Filière PC Concours 2003 math 1

## PARTIE 1

**1a)** Si  $X = (x_i)_{i=1}^n$  et  $Y = (y_i)_{i=1}^n$  sont des éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  on a

$${}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**1b)** Développement sans problème :

$$\begin{aligned} ({}^tXY)^2 &= ({}^tXY)({}^tXY) = ({}^tXY)({}^tYX) \text{ calcul précédent} \\ &= ({}^tX)(Y^tY)(X) \text{ par associativité} \\ &= ({}^tYX)({}^tXY) = {}^tY(X^tX)Y \text{ symétriquement} \end{aligned}$$

**1c)** Si on considère que " ${}^tXY = \langle x, y \rangle$  dans une base orthonormée" n'est pas une formule classique on refait le calcul et

$${}^tX(SY) = \sum_{(i,j)} x_i s_{i,j} y_j = \langle X, SY \rangle$$

puis comme  $S$  est symétrique  ${}^tX(SY) = {}^tX^tSY = {}^t(SX)Y = \langle SX, Y \rangle$

**2a)** On a :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXS_1X \geq 0$  et  ${}^tXS_2X \geq 0$  et donc en ajoutant  ${}^tX(S_1 + S_2)X \geq 0$

$$(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2 \Rightarrow S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

**2b)** idem car la somme d'un réel positif et d'un réel strictement positif est un réel strictement positif.

**2c)** On a :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX(AA)X = {}^t(AX)(AX) = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$ . Et donc

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

**3a)** Si  $SX = \lambda X$  on a  ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$ . Donc si  ${}^tXSX = 0$  on a  $\lambda = 0$  (car  $X$  est non nul donc  $\|X\| \neq 0$ )

$S$  est donc une matrice diagonalisable (car symétrique réelle) ayant une unique valeur propre 0.  $S$  est donc la matrice nulle:  $S = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = (0)$

**3b)** On veut que  $MX$  soit orthogonal à  $X$  pour tout  $X$ . c'est une propriété classique du produit vectoriel. Il suffit de prendre pour  $M$  la matrice de  $x \rightarrow i \wedge x$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors bien  ${}^tXMX = 0$

**4a)**  $S$  étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée  $(V_i)_{i=1}^n$ : il existe  $D = \text{diag}(\lambda_k)$  telle que  $\forall k, SV_k = \lambda_k V_k$

Si toutes les valeurs propres sont positives on a alors pour toute matrice colonne  $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$${}^tXSX = \langle X, SX \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

Réciproquement si  $\lambda$  est valeur propre de  $S$  et  $X$  un vecteur propre associé. le calcul du **3a** donne  ${}^tXSX = \lambda \|X\|^2$ . comme on suppose  ${}^tXSX \geq 0$  et que  $X \neq \vec{0}$  on a bien  $\lambda \geq 0$

**4b)** deux matrices semblables ont même spectre. Donc si  $S'$  est symétrique réelle semblable à  $S$  symétrique positive les valeurs propres de  $S$  (donc de  $S'$ ) sont toutes positives donc  $S'$  est positive.

**5a)** Sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  la relation  $\geq$  est bien :

- binaire
- réflexive :  $(0)_n$  est bien positive donc  $S_1 \geq S_1$

- antisymétrique : si  $S_1 \geq S_2$  et si  $S_2 \geq S_1$  les valeurs propres de  $S_2 - S_1$  sont toutes à la fois positives et négatives.  $S_2 - S_1$  est donc diagonalisable ( car symétrique réel ) ayant une seule valeur propre 0 donc c'est la matrice nulle. .  $S_2 = S_1$
- transitive : Si  $S_1 \geq S_2$  et  $S_2 \geq S_3$  on a  $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $S_2 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  donc d'après **2a** la somme  $S_1 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et donc  $S_1 \geq S_3$  .

**5b)** il suffit de prendre  $S_1 = 0$  et pour  $S_2$  une matrice symétrique ayant une valeur propre positive et une négative .  
Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**5c)** la relation  $>$  n'est pas réflexive car  $(0)_n \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

**5d)** On peut se douter (ou montrer) qu'une matrice de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  a des valeurs propres strictement positives.

On prend donc  $S_2 = 0$  et  $S_1$  symétrique ayant des valeurs propres positives et ayant la valeur propre 0 . Par exemple

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ On a } S_1 \neq (0) \text{ et } {}^t X S_1 X = z^2 \geq 0 \text{ et si } X = \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ } {}^t X S_1 X = 0$$

**6a) question de cours** .On doit montrer  $x \in E_\lambda(u) \Rightarrow v(x) \in E_\lambda(u)$  . Donc  $u(x) = \lambda x \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$ . Or

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) \\ &= (v \circ u)(x) \text{ par hypothèse sur } u \text{ et } v \\ &= v(u(x)) = v(\lambda x) \\ &= \lambda v(x) \text{ par linéarité de } v \end{aligned}$$

**6b)** L'endomorphisme induit par  $v$  diagonalisable sur un sous espace stable est lui même diagonalisable. Donc l'endomorphisme  $v_i$  est diagonalisable et il existe une base de  $E_{\lambda_i}(u)$  qui est une base de vecteurs propres de  $v_i$ .  $u$  étant diagonalisable  $E$  est somme directe des sous espaces propres .L'union des bases précédente est donc une base de  $E$  . Par construction ces vecteurs sont des vecteurs propres de  $v$  et de  $u$  (car éléments des sous espaces propres) . Dans cette base  $u$  et  $v$  sont donc simultanément diagonalisables.

**7a)** Si  $A$  et  $B$  commutent  $A$  et  $B$  sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage . On prend la question précédente avec  $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$  .  $P$  est alors la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  .

Réciproquement si  $A$  et  $B$  son diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage . On a  $A = PDP^{-1}$  ,  $B = P\Delta P^{-1}$  et comme deux matrices diagonales commutent  $AB = BA = P(D\Delta)P^{-1}$

**7b)**

$A$  est de rang 1 et  $E_0(A)$  est le plan  $(x + y - z = 0)$  . Par la trace on en déduit que la troisième valeur propre est 3

$$\text{puis on trouve } E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour  $B$  le calcul du polynôme caractéristique en commençant par faire  $C_2 + C_3 - > C_3$  donne deux valeurs propres 4(double) et 1(simple) . Puis le calcul des sous espaces propres donne :  $E_4(B)$  est le plan  $-2x + y - z = 0$

et  $E_1(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  . On vérifie alors que  $E_1(B) \subset E_0(A)$  ,  $E_3(A) \subset E_4(B)$  . Les trois droites  $E_1(B), E_3(A)$  ,

$E_0(A) \cap E_4(B)$  sont trois droites de vecteurs propres communs qui engendrent l'espace . Une matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*remarque : je ne pense pas que le passage par l'endomorphisme induit par  $v$  sur  $E_0(A)$  soit plus simple*

**8)**  $S_1$  et  $S_2$  sont diagonalisables (symétriques réels) , et commutent .  $S_1$  et  $S_2$  sont donc diagonalisables avec une même matrice de passage ( $S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$ ). Cette matrice de passage diagonalise aussi  $S_1 S_2 = S_2 S_1 = PD\Delta P^{-1}$  , la matrice diagonale semblable à  $S_1 S_2$  étant le produit des deux matrices semblables à  $S_1$  et  $S_2$ .  $S_1$  et  $S_2$  étant positives ont toutes leurs valeurs propres positives. Les valeurs propres de  $S_1 S_2$  sont donc aussi toutes positives et  $S_1 S_2$  est symétrique positive.(toujours **4a**)

**9a)** Avec les notations précédentes ( $S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$ ). On a donc  $\Delta - D$  positives . Donc pour les termes diagonaux  $\delta_i - d_i \geq 0$  et  $d_i \geq 0$  . La fonction carrée est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc  $\forall i, \delta_i^2 \geq d_i^2$  .  $\Delta^2 - D^2$  est donc positive et  $S_2^2 - S_1^2$  est une matrice symétrique semblable à une matrice symétrique positive donc est aussi positive.  $S_2^2 \geq S_1^2$  ( cf **4b**)

**9b)** On a  $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  de valeurs propres 0 et 5/2 réels positifs. La matrice est positive est  $S_2 \geq S_1$

$S_1$  de valeurs propres 0 et 1 donc  $S_1 \geq 0$

et  $S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$  de déterminant  $-9/4$ . Le produit des valeurs est négatif. L'une des valeurs propres est négative.  $S_2^2 - S_1^2$  n'est pas positive.

## Partie II

1)

**a**  $\Leftrightarrow$  **b** : idem **I4a**

$S$  étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée  $(V_i)_{i=1}^n$  : il existe  $D = \text{diag}(\lambda_k)$  telle que  $\forall k$ ,  $SV_k = \lambda_k V_k$

Si toutes les valeurs propres sont strictement positives on a alors pour toute matrice colonne non nulle  $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$${}^t X S X = \langle X, S X \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 > 0$$

En effet on a une somme de termes positifs, un au moins étant strictement positif.

Réciproquement si  $\lambda$  est valeur propre de  $S$  et  $X$  vecteur propre associé on a  ${}^t X S X = \lambda \|X\|^2$ . Comme on suppose  ${}^t X S X > 0$  et que  $X \neq \vec{0}$  on a bien  $\lambda > 0$

**b**  $\Rightarrow$  **c**.  $S$  étant diagonalisable dans une base orthonormée (symétrique réelle) on peut écrire  $S = P D^t P$ . avec  $D = \text{diag}(d_i)$ . Par hypothèses les  $d_i$  sont strictement positifs. On peut donc définir  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_i})$  qui est inversible car les termes diagonaux sont non nuls.  $M = \Delta^t P$  est alors une solution du problème.

$${}^t M M = P \Delta \Delta^t P = P D^t P = S$$

**c**  $\Rightarrow$  **d** si  $S = {}^t M M$  avec  $M$  inversible,  $S$  est inversible (comme produit de matrices inversibles) et  $S$  est positive d'après **I2c**

**d**  $\Rightarrow$  **b** :  $S$  est positive donc toutes les valeurs propres de  $S$  sont positives et  $S$  est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de  $S$ . Les valeurs propres de  $S$  sont donc strictement positives.

On a la chaînes  $b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow b$  et  $a \Leftrightarrow b$  donc l'équivalence des 4 propositions.

**2a)**  $A$  est bien une matrice symétrique.

Si  $X = (x_i)_{i=1}^n$  et  $Y = AX = (y_j)_{j=1}^n$  on a :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ \forall j \in [[2, n-1]] , y_j = -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2x_n \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} {}^t X A X &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left( \sum_{i=2}^n x_i^2 + x_1^2 \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \right) - \sum_{i=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left( \sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1}^2 + x_1^2 \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2) \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

**2b** pour toute colonne  $X$  on constate que  ${}^t X A X$  est une somme de carré donc est un réel positif. De plus la somme

est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc si et seulement si  $\begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall i \in [[1, n-1]] , x_{i+1} - x_i = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$

Tous les  $x_i$  sont donc nuls. Donc si  $X \neq (0)$   ${}^t X A X$  est strictement positif.

**2c)** Avec la matrice  $M$  du sujet notons  $S = {}^t M M = (s_{i,j})$  on a en faisant le produit :

$$\begin{cases} s_1 = u_1^2 \\ i > 1 \Rightarrow s_i = u_i^2 + v_{i-1}^2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow s_{i,i+1} = s_{i+1,i} = u_i v_i \\ |j-i| > 1 \Rightarrow s_{i,j} = 0 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} u_1^2 = 2 \\ i > 1 \Rightarrow u_i^2 + v_{i-1}^2 = 2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow u_i v_i = -1 \end{cases}$$

On a donc  $v_i = -\frac{1}{u_i}$  et en reportant  $u_i^2 = 2 - \frac{1}{u_{i-1}^2}$ . Soit en posant  $a_i = u_i^2$  la suite homographique:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_i = 2 - \frac{1}{a_{i-1}} \end{cases}$$

l'équation  $l = 2 - 1/l$  donne un point fixe double  $l = 1$ . La suite  $\frac{1}{a_{i-1}}$  est donc arithmétique. Or

$$\frac{1}{a_i - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i-1}}} = \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} - 1} = 1 + \frac{1}{a_{i-1} - 1}$$

d'où  $\frac{1}{a_{i-1}} = i$  et

$$u_i = \sqrt{\frac{i+1}{i}}, v_i = -\sqrt{\frac{i}{i+1}}$$

**3a)**  $\mathcal{U}$  est une base car  $S$  est une matrice inversible d'après **IIIc**

**3b)** C'est la méthode d'orthogonalisation de Schmidt. Démonstration par récurrence

- $(V_1)$  est réduit à un seul vecteur non nul donc est une famille orthogonale de vecteurs non nuls
- $(V_1, V_2)$  est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et  $\text{Vect}(V_1, V_2) = \text{Vect}(U_1, U_2)$ . En effet
  - $p_1$  est la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(U_1) = \text{Vect}(V_1)$  donc  $V_2 = U_2 - p_1(U_2)$  est orthogonal à  $V_1$
  - si  $V_2$  était nul, on aurait  $U_2 = p_1(U_2) \in \text{Vect}(U_1)$ . Absurde car  $(U_1, U_2)$  est libre
  - $(V_1, V_2)$  est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, c'est donc une famille libre.
  - Enfin  $\text{Vect}(V_1, V_2) \subset \text{Vect}(U_1, U_2)$  par construction, et comme les deux familles de deux vecteurs sont libres il y a égalité.
- On suppose que  $(V_i)_{i=1}^{k-1}$  est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$ . Montrons que  $(V_i)_{i=1}^k$  est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$ .
  - par hypothèse de récurrence on doit seulement montrer que  $V_k$  est un vecteur non nul orthogonal à  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1}$  puis  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$ .
  - Par construction  $p_{k-1}$  est la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$  donc  $V_k = U_k - p_{k-1}(U_k)$  est orthogonal à  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1}$
  - Si  $V_k$  est nul alors  $U_k = p_{k-1}(U_k) \in \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$  et la famille  $(U_i)_{i=1}^n$  est liée. Absurde
  - Enfin par construction  $V_k \in \text{Vect}(U_k) \oplus \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$  et  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1} \subset \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$ . Donc  $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k \subset \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$ . Les deux familles étant libres de même cardinal, les deux sous espaces sont égaux.

pour  $k = n$  on obtient que  $\mathcal{V}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

**3c)** La base est orthonormale car on norme une base orthonormée (et les dénominateurs sont non nuls car les  $V_i$  sont des vecteurs non nuls)

Par construction de  $\mathcal{V}$  on a vu que  $V_k \in \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$ . Les coordonnées de  $V_k$  sur  $U_{k+1}, \dots, U_n$  sont donc nulles.

$\text{Mat}_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$  est triangulaire supérieure. Diviser chaque colonne par sa norme ne change pas les coefficients nuls.

$\text{Mat}_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})$  est triangulaire supérieure.

**3d)** notons  $\mathcal{B}$  la base canonique. On a

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) \text{Mat}_{\mathcal{W}}(\mathcal{U}) = PT$$

où  $T$  est l'inverse de la matrice triangulaire supérieure construite à la question précédente.

On a alors  $S = {}^t M M = {}^t T P P T$ . Mais  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{W}$  toutes deux bases orthonormées.

Donc  $P$  est orthogonale et  ${}^t P P = I_n$ . Il reste donc  $S = {}^t T T$

**3e)** Si on pose à priori  $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$  le calcul donne :

$${}^t T T = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en résolvant le système ligne par ligne et en choisissant pour  $a, d, f$  les racines carrées positives on obtient

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que  $T$  est inversible et donc d'après **II 1**  $S$  est définie positive.

**4a)** Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  on a  ${}^t X A_0 X = by^2 + 2cxy$  donc  $y = 0$  ou  $by + 2cx = 0$

**4b)**

- si  $A$  est définie positive les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives (cf **II 1**). Leur somme (la trace) et leur produit (le déterminant) le sont aussi. On a donc  $a + b > 0$  et  $ab - c^2 > 0$ . On en déduit que  $a + b$  et  $ab$  sont strictement positifs donc  $a$  et  $b$  le sont.
- Si  $a > 0$  et  $ab - c^2 > 0$  on a  $b > \frac{c^2}{a} > 0$  donc  $Tr(A) > 0$  et  $\det(A) > 0$ . La somme et le produit des valeurs propres sont strictement positifs donc les valeurs propres sont strictement positives. D'après **II 1**  $A$  est définie positive.

**4c)** calcul par bloc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & {}^t X' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^t V \\ V & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xa + {}^t X' V & x {}^t V + {}^t X' S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} \\ &= xax + x {}^t X' V' + x {}^t V X' + {}^t X' S' S' \\ &= ax^2 + x({}^t V X' + {}^t X' V) + {}^t X' S' X' \\ &= ax^2 + 2x {}^t V X' + {}^t X' S' X' \text{ car } {}^t V X' = {}^t X' V \text{ d'après I 1a} \\ &= a \left( x + \frac{{}^t V X'}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} ({}^t V X')^2 + {}^t X' S' X' \\ &= a \left( x + \frac{{}^t V X'}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} ({}^t X' V {}^t V X') + {}^t X' S' X' \text{ d'après I 1 b} \\ &= a \left[ \left( x + \frac{{}^t V X'}{a} \right)^2 + \frac{1}{a^2} {}^t X' (-V {}^t V + a S') X' \right] \end{aligned}$$

On vérifie que tous les produits matriciels ont un sens les matrices étant de tailles compatibles.

On en déduit donc :

- si  $a > 0$  et  $aS' - V {}^t V$  définie positive, pour toute matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  on a  $\left( x + \frac{{}^t V X'}{a} \right)^2 \geq 0$  et  ${}^t X' (aS' - V {}^t V) X' \geq 0$  donc  ${}^t X S X \geq 0$ . De plus si  ${}^t X S X = 0$  on a une somme nulle de réelles positives donc chaque terme est nulle. En particulier  ${}^t X' (aS' - V {}^t V) X' = 0$  et donc  $X' = 0$  car  $aS' - V {}^t V$  est définie positive on trouve alors  $x = 0$  en reportant dans  $\left( x + \frac{{}^t V X'}{a} \right)^2 = 0$ . Donc  $X \neq 0 \Rightarrow {}^t X S X > 0$  et  $S$  est définie positive.
- Si  $S$  est définie positive alors  $a > 0$  car pour  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix}$ ,  ${}^t X S X = a$  d'après le calcul précédent (avant la division par  $a$ ) et  $aS' - V {}^t V$  est définie positive car pour toute matrice non nul  $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

$${}^t X' (aS' - V {}^t V) X' = a^2 {}^t X S X > 0 \text{ en prenant } X = \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}$$

**4d)**

- Si  $S$  est définie positive la question précédente donne par une récurrence évidente que toutes les  $S_i$  sont définies positives et tous les  $a_i$  positifs pour  $i < n$ . Enfin  $a_n > 0$  comme valeur propre de la matrice  $S_n$  définie positive.
- Réciproquement si les  $(a_i)$  sont tous strictement positifs  $S_n = (a_n)$  est définie positive.  $S_n$  est définie positives et  $a_{n-1} > 0$  donc  $S_{n-1}$  est définie positive et par récurrence si  $S_{i-1}$  est définie positive  $S_i$  est définie positive car  $a_{i-1} > 0$ .

**4e)** Si  $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$  on a  $a_1 = a, V_1 = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, S'_1 = \begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix}$  d'où

$$S_2 = \begin{pmatrix} ab - d^2 & af - de \\ af - de & ac - e^2 \end{pmatrix}$$

$S$  est donc définie positive si et seulement si  $a > 0$  et  $S_2$  définie positive . Donc en utilisant **II 4b** si et seulement si  $a > 0, ab - d^2 > 0$  et  $\det(S_2) > 0$  or  $\det(S_2) = (ab - d^2)(ac - e^2) - (af - de)^2 = a \det(S)$

$S$  est définie positive si seulement si  $a > 0$  ,  $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0$  ,  $\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0$