$\boxed{\textbf{Corrigé ccp math2 PC}}$

Partie I

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction polynomiale $f_n \,:\, x \mapsto (x^2-1)^n$.
On notera également pour $k \in \mathbb{N}$, indifféremment, $D^k((x^2-1)^n) = (f_n)^{(k)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\,[(x^2-1)^n]$

I.1.
$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \dfrac{3}{2}\,x^2 - \dfrac{1}{2}$
$P_3(x) = \dfrac{5}{2}\,x^3 - \dfrac{3}{2}\,x$

I.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est paire. Par conséquent sa dérivée $n$ième est une fonction paire si n est pair, impaire si n est impair.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(-x) = (-1)^n\,P_n(x).$$

I.3. On déduit de ce qui précède que $P_n(0) = 0$ si n est impair et que si n est pair, P'_n est impaire d'où $P'_n(0) = 0$.
Reste à déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P_{2p}(0)$ et $P'_{2p+1}(0)$.

$(x^2-1)^{2p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p} \mathrm{C}_{2p}^k\,(-1)^{2p-k}\,x^{2k}$. Comme $D^{2p}(x^{2k}) = 0$ si $k < p$, on obtient en dérivant $2p$ fois :

$$P_{2p}(x) = \frac{1}{2^{2p}\,(2p)!}\sum_{k=p}^{2p} \mathrm{C}_{2p}^k\,(-1)^{2p-k}\,D^{2p}(x^{2k}).$$

$D^{2p}(x^{2k})$ est nul en $x = 0$ sauf si $k = p$ auquel cas il vaut $(2p)!$. On en déduit après simplifications :

$$P_{2p}(0) = (-1)^p\,\frac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}
P'_{2p+1}(x) &= \frac{1}{2^{2p+1}\,(2p+1)!}\sum_{k=0}^{2p+1} \mathrm{C}_{2p+1}^k\,(-1)^{2p+1-k}\,D^{2p+2}(x^{2k}) \\
&= \frac{1}{2^{2p+1}\,(2p+1)!}\sum_{k=p+1}^{2p+1} \mathrm{C}_{2p+1}^k\,(-1)^{2p+1-k}\,\frac{(2k)!}{(2k-2p-2)!}\,x^{2k-2p-2}.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$P'_{2p+1}(0) = (-1)^p\,\frac{(2p+1)!}{2^{2p}\,(p!)^2}$$

Soit finalement pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{array}{ll}
P_{2p}(0) = (-1)^p\,\dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,(p!)^2} & P'_{2p}(0) = 0. \\[2ex]
P_{2p+1}(0) = 0 & P'_{2p+1}(0) = (-1)^p\,\dfrac{(2p+1)!}{2^{2p}\,(p!)^2}
\end{array}}$$

I.4.
Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule de Leibnitz à $\dfrac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\,\big[(x^2-1)(x^2-1)^n\big]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\,\big[(x^2-1)^{n+1}\big] &= \sum_{k=0}^{n+2} \mathrm{C}_{n+2}^k D^k(x^2-1)\,D^{n+2-k}((x^2-1)^n) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_{n+2}^k D^k(x^2-1)\,D^{n+2-k}((x^2-1)^n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x^2-1)D^{n+2}((x^2-1)^n) + 2(n+2)xD^{n+1}((x^2-1)^n) + (n+2)(n+1)D^n((x^2-1)^n) \\
&= 2^n\, n!\,\big[(x^2-1)P_n''(x) + 2(n+2)xP_n'(x) + (n+2)(n+1)P_n(x)\big]
\end{aligned}
$$

D'autre part, $f_{n+1}'(x) = 2(n+1)x\,(x^2-1)^n$. En appliquant de nouveau la formule de Leibnitz à la dérivée $(n+1)$ième de ce produit , on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\,\big[(x^2-1)^{n+1}\big] &= 2(n+1)\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k D^k(x)\, D^{n+1-k}((x^2-1)^n) \\
&= 2(n+1)\big[x\,D^{n+1}((x^2-1)^n) + (n+1)D^n((x^2-1)^n)\big] \\
&= 2(n+1)\,2^n\, n!\,\big(xP_n'(x) + (n+1)P_n(x)\big)
\end{aligned}
$$

En identifiant, on obtient l'égalité voulue

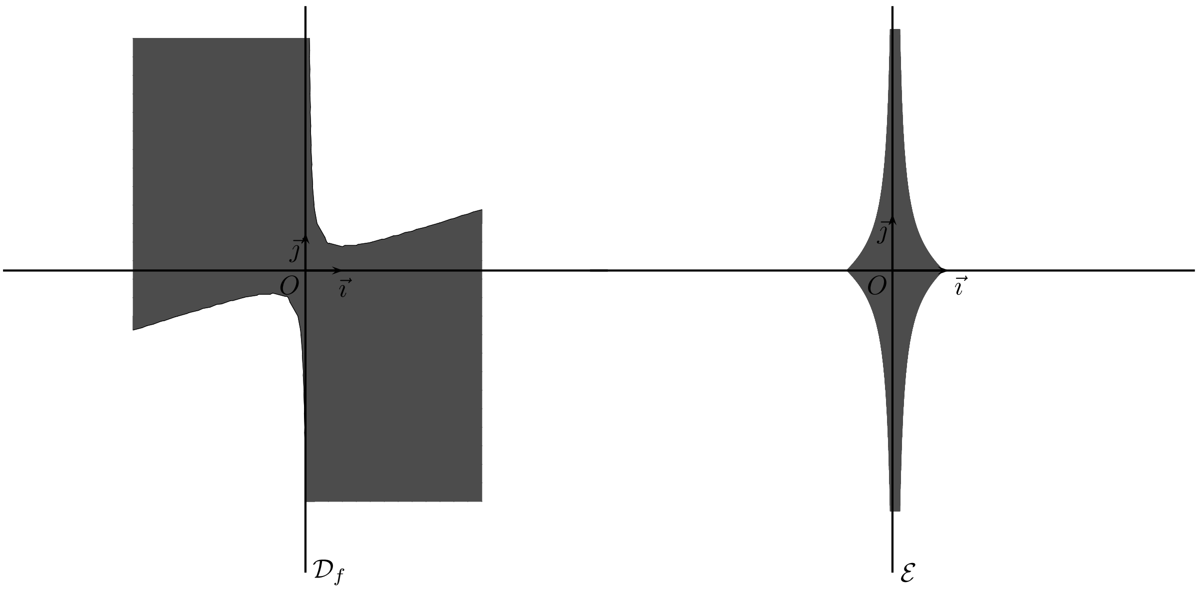
$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

I.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. 1 et -1 sont racines d'ordre n de f_n donc racines d'ordre $n-k$ de $f_n^{(k)} = D^k(f_n)$.
Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ la propriété $\mathcal{P}_k$: " $f_n^{(k)}$ s'annule au moins k fois sur $]-1, 1[$."
• $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• f_n s'annule en -1 et en 1, est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, donc f_n' s'annule au moins une fois sur $]-1, 1[$ d'après le théorème de Rolle : $\mathcal{P}_1$ est établie.
• Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les zéros de $f_n^{(k)}$ dans $]-1, 1[$ avec $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 1$. Comme $n - k \geq 1$, $f_n^{(k)}(-1) = f_n^{(k)}(1) = 0$. Notons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.
Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f_n^{(k)}(\alpha_i) = f_n^{(k+1)}(\alpha_{i+1}) = 0$, $f_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$: d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f_n^{k+1}(\beta_i) = 0$.
On a $-1 = \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1} < \cdots < \beta_k < \alpha_k = 1$, on obtient donc ainsi $k+1$ racines distinctes de $f_n^{(k+1)}$ dans $]-1, 1[$ ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$.
La récurrence est établie : $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
En particulier, $\mathcal{P}_n$ assure que $P_n = \dfrac{1}{2^n\, n!}\, f_n^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1, 1[$. Comme de plus P_n est une fonction polynôme de degré n en tant que dérivée $n$ième d'une fonction polynôme de degré $2n$, P_n admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.
Ce sont donc les seules racines de P_n et elles sont simples.

Partie II

II.1. $f(x, y)$ est défini pour $x^2 + 1 > 2xy$, ce qui équivaut à
$x = 0$ ou ($x > 0$ et $y < \frac{1}{2}\,(x + \frac{1}{x})$) ou ($x < 0$ et $y > \frac{1}{2}\,(x + \frac{1}{x})$).
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{1}{2}\,(x + \frac{1}{x})$.
$\mathcal{D}_f = \{\, (0, y) \mid y \in \mathbb{R} \,\} \cup \{\, (x, y) \mid x > 0 \text{ et } y < \varphi(x) \,\} \cup \{\, (x, y) \mid x < 0 \text{ et } y > \varphi(x) \,\}$.
La fonction φ est impaire : les deux ensembles $\{\, (x, y) \mid x > 0 \text{ et } y < \varphi(x) \,\}$ et $\{\, (x, y) \mid x < 0 \text{ et } y > \varphi(x) \,\}$ sont symétriques par rapport au point O.
Etudions la fonction φ sur $\mathbb{R}_*^+$:
$\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\varphi'(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$. $\varphi'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$ et $\varphi'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.
De plus $\lim\limits_{x \to 0+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$.
On en déduit le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}_*^+$ puis, en gris la représentation graphique de $\mathcal{D}_f$, le domaine ouvert délimité par les deux branches de la courbe représentative de φ.

x	0		1		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



II.2.

$\mathcal{E} = \{\,(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\,\} \cup \{\,(x,y) \mid x \in \mathbb{R}^*,\ |\,y\,| < \dfrac{1-x^2}{2|\,x\,|}\,\} = \{\,(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\,\} \cup \{\,(x,y) \mid x \in]-1,1[,\ |\,y\,| < \dfrac{1-x^2}{2|\,x\,|}\,\}.$

On peut ici utiliser la fonction Ψ définie sur $[-1,1] \setminus \{\,0\,\}$ par $\Psi(x) = \dfrac{1-x^2}{2|\,x\,|}$.

Ψ est paire, strictement décroissante sur $]\,0,1\,]$, $\Psi(1) = 0$, $\Psi'(1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0+} \Psi(x) = +\infty$.

$\mathcal{E}$ est le domaine ouvert délimité par les courbes représentatives de $x \mapsto \Psi(x)$ et $x \mapsto -\Psi(x)$ pour $x \in]-1,1[$ représenté en gris ci dessus. On peut remarquer que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_f$.

II.3.

On peut remarquer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ donc aussi sur $\mathcal{E}$ et que pour tout réel y, il existe $h > 0$ tel que $]-h,h[\times\{\,y\,\} \subset \mathcal{E}$: on suppose que les fonctions A_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $(x,0) \in \mathcal{E}$ et donc $f(x,0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(0)\,x^n$.

D'autre part, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x,0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ dont on connait le développement en série entière sur $]-1,1[$:

$\forall x \in]-1,1[\quad (1+x^2)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,x^{2n}.$

Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $]-1,1[$, on en déduit que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad A_{2p+1}(0) = 0 \text{ et } A_{2p}(0) = \frac{(-1)^p\,(2p)!}{(2^p p!)^2}\,.}$$

De plus par hypothèse, pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n'(y)\,x^n$.

En particulier pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n'(0)\,x^n$.

Or pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-2xy+x^2)^{-3/2}$ et $\forall x \in]-1,1[\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x(1+x^2)^{-3/2}$.

Or $\forall x \in]-1,1[\quad x(1+x^2)^{-3/2} = x(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n\, x^{2n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n\, x^{2n+1}$ avec $\beta_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $\beta_n = \dfrac{-3/2(-3/2-1)\cdots(-3/2+n-1)}{n!}$ soit après simplifications,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n = \frac{(-1)^n\,(2n+1)!}{(2^n\, n!)^2}\ .$$

On en déduit par unicité du dévelopement en série entière de $x \mapsto x(x^2+1)^{-3/2}$ que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad A'_{2p}(0) = 0 \text{ et } A'_{2p+1}(0) = \frac{(-1)^p\,(2p+1)!}{(2^p\, p!)^2}\ .}$$

II.4.

II.4.1. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -(x-y)\,(1-2xy+x^2)^{-3/2} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-2xy+x^2)^{-3/2}.$

$$\forall (x,y) \in \mathcal{E} \qquad x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (x-y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Or pour $(x,y) \in \mathcal{E}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(y) n\, x^{n-1} \quad$ d'où $\quad x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} nA_n(y)\, x^n.$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(y)\, x^n \quad$ d'où $\quad x\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A'_n(y)\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} A'_{n-1}(y)\, x^n$

et $y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} yA'_n(y)\, x^n.$

On obtient donc pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$,

$$yA'_0(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} (nA_n(y) + A'_{n-1}(y) - yA'_n(y))\, x^n = 0.$$

On a déja remarqué que pour tout réel y, il existe $h > 0$ tel que $]-h,h[\times\{\, y\,\} \subset \mathcal{E}$.

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, $(x \mapsto 0,\ x \in]-h,h[)$, on en déduit les égalités demandées :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad yA'_0(y) = 0 \ \text{ et pour tout } n \geq 1 \quad yA'_n(y) - A'_{n-1}(y) = nA_n(y)$$

II.4.2.

De la même façon, pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$, $(1-2xy+x^2)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (x-y)f(x,y) = 0$. D'autre part,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)A_{n+1}(y)\, x^n, \qquad 2xy\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nyA_n(y)\, x^n,$

$x^2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, A_n(y)\, x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)A_{n-1}(y)\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)A_{n-1}(y)\, x^n,$

$xf(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(y)\, x^n \qquad yf(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} yA_n(y)\, x^n.$

On obtient donc pour $(x,y) \in \mathcal{E}$,

$\sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)A_{n+1}(y) - (2n+1)yA_n(y) + nA_{n-1})\, x^n + A_1(y) - yA_0(y) = 0.$

Par unicité, à y fixé du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 0$ sur un intervalle ouvert $]-h,h[$, on en déduit les égalités (2) :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} A_1(y) - yA_0(y) = 0 \\ nA_n(y) - (2n-1)yA_{n-1}(y) + (n-1)A_{n-2}(y) = 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

II.4.3. Pour $n = 1$, on obtient en dérivant la relation $A_1(y) - yA_0(y) = 0$ et en utilisant que $yA_0'(y) = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad A_1'(y) = A_0(y).$$

La relation (3) est vraie pour $n = 1$.
Pour $n \geq 2$, en dérivant la relation (2), on a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$nA_n'(y) - (2n-1)A_{n-1}(y) - (2n-1)yA_{n-1}'(y) + (n-1)A_{n-2}'(y) = 0. \qquad (4)$$

D'autre part comme $n - 1 \geq 1$, on a d'après la relation (1) :

$$A_{n-2}'(y) = yA_{n-1}'(y) - (n-1)A_{n-1}(y).$$

En injectant dans (4), on obtient après simplifications $nA_n'(y) - n^2A_{n-1}(y) - nyA_{n-1}'(y) = 0$.
Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall y \in \mathbb{R} \quad A_n'(y) - yA_{n-1}'(y) = nA_{n-1}(y). \quad (3)$$

II.4.4. Remarquons que d'après (1), A_0' est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et donc sur $\mathbb{R}$ par continuité. On en déduit que $A_0'' = 0$ puis que la relation $(1-y^2)A_n''(y) - 2yA_n'(y) + n(n+1)A_n(y) = 0$ est vraie pour $n = 0$.
Pour $n \geq 1$, on obtient en dérivant (3) :

$$A_n''(y) - yA_{n-1}''(y) = (n+1)A_{n-1}'(y) \quad (5)$$

En dérivant (1) et en multipliant par y :

$$y^2A_n''(y) - yA_{n-1}''(y) = y(n+1)A_n'(y) - 2yA_n'(y). \quad (6)$$

$(5) - (6)$ donne :
$(1-y^2)A_n''(y) = (n+1)(A_{n-1}'(y) - yA_n'(y)) - 2yA_n'(y) = -n(n+1)A_n(y) - 2yA_n'(y)$ en utilisant (1).
Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad (1-y^2)A_n''(y) - 2yA_n'(y) + n(n+1)A_n(y) = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{B}_n)$ l'équation différentielle : $(1-x^2)z''(x) - 2xz'(x) + n(n+1)z(x) = 0$.
A_n et P_n sont solutions de $(\mathcal{B}_n)$ sur $\mathbb{R}$. De plus $P_n(0) = A_n(0)$ et $P_n'(0) = A_n'(0)$. (questions I.4 et II.3).
Comme $(\mathcal{B}_n)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre sans point singulier dans $]-1,1[$, on déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz que P_n et A_n coïncident sur $]-1,1[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall y \in]-1,1[\quad A_n(y) = P_n(y).$$

Partie III

avertissement J'utiliserai sans le démontrer le résultat suivant qui ne figure pas au programme pc même s'il figure dans de nombreux cours et ouvrages :
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de complexes telles que les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\, a_n \,|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\, b_n \,|$ convergent, alors la série trigonométrique $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f 2π périodique dont les coefficients de Fourier trigonométriques sont les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
$f(\theta) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ est donc alors le développement de f en série de Fourier.

III.1.
Pour tous réels x et θ, $1 - 2x\cos\theta + x^2 = (x - \mathrm{e}^{i\theta})(x - \mathrm{e}^{-i\theta})$. Si x est fixé tel que $|\, x \,| < 1$, les fonctions $\theta \mapsto F(x,\theta)$, $\theta \mapsto C(x,\theta)$ et $\theta \mapsto S(x,\theta)$ sont donc définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout réel θ,
$C(x,\theta) + iS(x,\theta) = \dfrac{1 - x\mathrm{e}^{-i\theta}}{(x - \mathrm{e}^{i\theta})(x - \mathrm{e}^{-i\theta})} = \dfrac{1 - x\mathrm{e}^{-i\theta}}{(x\mathrm{e}^{-i\theta} - 1)(x\mathrm{e}^{i\theta} - 1)} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}x}$.
Comme $|\, \mathrm{e}^{i\theta}x \,| = |\, x \,| < 1$, on a $\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{in\theta}$.

Soit finalement , si $|\,x\,| < 1$, pour tout réel θ,
$C(x,\theta)+iS(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta + i\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin n\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta + i\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin n\theta.$
En prenant la partie réelle et la partie imaginaire des deux membres de cette égalité, on en déduit que

$$\text{Pour } x \in]-1,1[,\ \forall\theta \in \mathbb{R},\quad C(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta \quad S(x,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin n\theta.$$

Comme $|\,x\,| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} |\,x\,|^n$ est convergente : les séries trigonométriques $\sum_{n\geq 0} x^n \cos n\theta$ et $\sum_{n\geq 1} x^n \sin n\theta$ sont normalement convergentes et d'après le théorème mentionné plus haut, ces égalités sont les développements en série de Fourier des fonctions $\theta \mapsto C(x,\theta)$ et $\theta \mapsto S(x,\theta)$.

III.2. Soit toujours x réel fixé, $|\,x\,| < 1$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2C(x,\theta) - 1 = (1-x^2)F(x,\theta)$.
On a donc $F(x,\theta) = \dfrac{1}{1-x^2}\,(-1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos n\theta) = \dfrac{1}{1-x^2}\,(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos n\theta)$.

Soit $F(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cos n\theta$ avec
$u_0(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n(x) = \dfrac{2x^n}{1-x^2}$.
Comme $|\,x\,| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} |\,x\,|^n$ converge et la série $\sum_{n\geq 0} |\,u_n(x)\,|$ converge également. On en déduit que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} u_n(x) \cos n\theta$ est normalement convergente et que l'égalité $F(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cos n\theta$ est le développement en série de Fourier de $\theta \mapsto F(x,\theta)$.

D'autre part, pour $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\qquad \sin\theta C(x,\theta) + \cos\theta S(x,\theta) = \sin\theta\, F(x,\theta)$.
D'où
$\sin\theta\, F(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n(\sin\theta\cos n\theta + \cos\theta \sin n\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin((n+1)\theta).$
Si $\sin\theta \neq 0$, $F(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\, x^n$.
de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \mapsto \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ se prolonge par continuité en $k\pi$:
En posant $\theta = k\pi + h$, $\sin\theta = (-1)^k \sin h \underset{h\to 0}{\sim} (-1)^k\, h$.
$\sin(n+1)\theta = (-1)^{k(n+1)} \sin(n+1)h \underset{h\to 0}{\sim} (-1)^{(n+1)k}\,(n+1)h$.
Finalement, $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \underset{\theta\to k\pi}{\sim} (-1)^{nk}\,(n+1)$.
En prolongeant ainsi en $k\pi$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, on peut écrire

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall\theta \in \mathbb{R}\quad F(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\, x^n.$$

III.3.
Soit $q \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in]q\pi, (q+1)\pi[$, $|\cos\theta\,| < 1$ et d'après II.4.4, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P_p(\cos\theta) = A_p(\cos\theta)$.
On sait qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout $x \in]-h,h[$, $(x,\cos\theta) \in \mathcal{E}$ et $f(x,\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\cos\theta) x^n$.
$\sum_{k=0}^{n} A_k(\cos\theta)\, A_{n-k}\cos\theta$ est alors le coefficient devant x^n dans le développement en série entière, pour $x \in]-h,h[$ de $x \mapsto f^2(x,\cos\theta) = F(x,\theta)$.
Comme pour $|\,x\,| < 1$, $F(x,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\, x^n$,
par unicité du développement en série entière de $x \mapsto F(x,\theta)$, pour $x \in]-h,h[$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(\cos\theta)\, P_{n-k}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(\cos\theta)\, P_{n-k}(\cos\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a déjà remarqué que $\theta \mapsto \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ se prolonge par continuité en tout $q\pi$ où $q \in \mathbb{Z}$.
Par continuité, l'égalité précédente se prolonge donc en tout $q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} P_k(\cos\theta)\, P_{n-k}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Partie IV

IV.1.
Soit $z(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, x^n$ sur $]-R, R[$, $R \neq 0$. z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et :
$z'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n\, x^{n-1}$ et $xz'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n\, x^n$.
$z''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n\, x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\alpha_{n+2}\, x^n$
$x^2 z''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n\, x^n$.
z est solution de (L_λ) sur $]-R, R[$ si et seulement si, sur $]-R, R[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+2)(n+1)\alpha_{n+2} - (n(n+1) - \lambda(\lambda+1))\alpha_n\big)\, x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, ceci équivaut à
$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)(n+1)\alpha_{n+2} = (n(n+1) - \lambda(\lambda+1))\alpha_n = (n-\lambda)(n+\lambda+1)\alpha_n$.

$$z \text{ est solution de } (L_\lambda) \text{ si et seulement si pour tout } n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+2} = \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+2)(n+1)}\ \alpha_n.$$

IV.2.
La formule de récurrence précédente équivaut à :
$\forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2p} = \dfrac{(2p-1+\lambda)(2p-2-\lambda)}{(2p(2p-1)}\ \alpha_{2(p-1)}$ et $\forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2p+1} = \dfrac{(2p+\lambda)(2p-1-\lambda)}{(2p+1)(2p)}\ \alpha_{2p-1}$.
Soit encore par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{2p} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} (2k-\lambda)(2k+1+\lambda)}{(2p)!}\ \alpha_0 \qquad \alpha_{2p+1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (2k-1-\lambda)(2k+\lambda)}{(2p+1)!}\ \alpha_1\,.$$

IV.3. Soit $z_1 : x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} (2k-\lambda)(2k+1+\lambda)}{(2p)!}\ x^{2p}$ et $z_2 : x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (2k-1-\lambda)(2k+\lambda)}{(2p+1)!}\ x^{2p+1}$.

Notons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\beta_{2p} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} (2k-\lambda)(2k+1+\lambda)}{(2p)!}$ et $\beta_{2p+1} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (2k-1-\lambda)(2k+\lambda)}{(2p+1)!}\ x^{2p+1}$.
Comme $\lambda \notin \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \neq 0$ et
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_{n+2}}{\beta_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+2)(n+1)} = 1$. On a donc pour $x \neq 0$,
$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left|\frac{\beta_{2p+2}\, x^{2p+2}}{\beta_{2p}\, x^{2p}}\right| = |\, x^2\,|$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left|\frac{\beta_{2p+3}\, x^{2p+3}}{\beta_{2p+1}\, x^{2p+1}}\right| = |\, x^2\,|$.

D'après la régle de D'alembert les séries $\sum_{p \geq 0} \beta_{2p}\, x^{2p}$ et $\sum_{p \geq 0} \beta_{2p+1}\, x^{2p+1}$ sont absolument convergentes si $|\, x\,| < 1$ et grossièrement divergentes si $|\, x\,| > 1$.
Ces deux séries entières ont toutes les deux pour rayon de convergence 1. Comme de plus elles sont "disjointes" (plus précisement les deux suites de leurs coefficients sont à supports disjoints), le rayon de convergence de toute combinaison linéaire non nulle de ces deux séries entières est encore 1.
Or les solutions développables en série entière de (L_λ) sont les fonctions $z = \alpha_0 z_1 + \alpha_1 z_2$. Ce sont (mis à part la fonction nulle) des sommes de série entière de rayon de convergence 1.
Comme (L_λ) est linéaire du second ordre sans point singulier dans $]-1, 1[$, on obtient ainsi toutes les solutions de (L_λ) sur $]-1, 1[$.