Corrigé maths 2 CCP 2000

Partie I

I.1.

I.1.1. Pour tout complexe z, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (de somme e^z), donc également la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!} \text{ est } +\infty.}$$

I.1.2.

$$\boxed{S(0) = 1 \text{ et pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ S(z) = \frac{e^z - 1}{z}\cdot}$$

I.2.

I.2.1. La fonction f est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$, en tant que somme d'une série entière de rayon de convergence R. Or f n'est pas définie, ni prolongeable par continuité en $2i\pi$, donc

$$\boxed{2\pi \leq R.}$$

I.2.2.

$$\boxed{B_0 = f(0) = 1}$$

I.2.3. Pour tout complexe z tel que $|z| < 2\pi$, $S(z)f(z) = 1$. En utilisant le théorème relatif au produit de deux séries entières,

si $|z| < 2\pi$, $f(z)S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$c_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{B_p}{p!} \frac{1}{(n-p+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=0}^{n} C_{n+1}^{p} B_p$.

Par unicité du développement en série entière de la fonction 1, on en déduit que $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 0$. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^{p} B_p + (n+1)B_n = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^{p} B_p.}$$

On sait que B_0 est rationnel; si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ sont rationnels, la formule de récurrence précédente prouve que B_n l'est également.
Par récurrence, on en déduit que tous les coefficients B_n, pour $n \in \mathbb{N}$, sont rationnels.

I.2.4.

$$\boxed{B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}\cdot}$$

I.2.5. Soit $z \in D(0, 2\pi)$. Si $z \neq 0$,

$f(z) - f(-z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{e^{-z} - 1} = z \frac{e^z + e^{-z} - 2}{(e^z - 1)(e^{-z} - 1)} = -z$, ce qui est encore vrai pour $z = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in D(0, 2\pi), \quad f(z) - f(-z) = -z.}$$

Or $f(z)=B_0+B_1z+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}\,z^n$, $f(-z)=B_0-B_1z+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^nB_n}{n!}\,z^n$.

On obtient pour tout $z\in D(0,2\pi)$, $-z=2B_1z+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)B_n}{n!}\,z^n$

Par unicité du développement en série entière de la fonction $z\to -z$, on retrouve que $B_1=-\dfrac{1}{2}$ et pour tout $n\geq 2$, $\dfrac{(1-(-1)^n)B_n}{n!}=0$.

On a alors,

$$\boxed{\text{Pour tout } k\geq 1,\ B_{2k+1}=0.}$$

I.3.

I.3.1. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\frac{f(4z)-f(2z)}{z}&=\frac{4}{(\mathrm{e}^{2z}-1)(\mathrm{e}^{2z}+1)}-\frac{2}{\mathrm{e}^{2z}-1}\\&=\frac{2(1-\mathrm{e}^{2z})}{\mathrm{e}^{4z}-1}\\&=\frac{-2}{\mathrm{e}^{2z}+1}\cdot\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\Delta(z)=1+\dfrac{f(4z)-f(2z)}{z}=\dfrac{\mathrm{e}^{2z}-1}{\mathrm{e}^{2z}+1}\cdot$

Pour $z=0$, l'égalité est encore vraie en considérant $\lim\limits_{z\to 0}\Delta(z)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } z\in\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}\cup\{\,0\,\},\quad 1+\frac{f(4z)-f(2z)}{z}=\frac{\mathrm{e}^{2z}-1}{\mathrm{e}^{2z}+1}=\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}\cdot}$$

I.3.2. Remarquons que si $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\operatorname{th}x$ et si $x\in\mathbb{R}$, $x\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}=i\tan x$.

D'autre part, si $|\,z\,|<\dfrac{\pi}{2}$, $|\,4z\,|<2\pi$ et $|\,2z\,|<2\pi$. On a alors, en tenant compte du fait que $B_1=-\dfrac{1}{2}$ et $B_{2k+1}=0$ si $k\geq 1$,

$f(4z)=1-2z+\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{4^{2p}B_{2p}}{(2p)!}\,z^{2p}$, $f(2z)=1-z+\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2^{2p}B_{2p}}{(2p)!}\,z^{2p}$, d'où

$1+\dfrac{f(4z)-f(2z)}{z}=\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{B_{2p}}{(2p)!}\,2^{2p}(2^{2p}-1)z^{2p-1}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!}\,2^{2p+2}(2^{2p+2}-1)z^{2p+1}$.

En particulier, si x est réel et $|\,x\,|<\dfrac{\pi}{2}$,

$$\boxed{\operatorname{th}x=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!}\,2^{2p+2}(2^{2p+2}-1)x^{2p+1}}$$

De même, $\tan x=\dfrac{1}{i}\,\Delta(ix)$, soit

$$\boxed{\tan x=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\,\frac{B_{2p+2}}{(2p+2)!}\,2^{2p+2}\,(2^{2p+2}-1)x^{2p+1}}$$

Notons R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières précédentes.

$R_1=R_2=\sup\{\,r\in\mathbb{R}^+\mid\left(\left|\dfrac{B_{2p+2}}{(2p+2)!}\,2^{2p+2}(2^{2p+2}-1)\right|r^{2p+1}\right)_p$ est bornée$\,\}$ et comme ces deux séries entières sont absolument convergentes si $|\,x\,|<\dfrac{\pi}{2}$, $R_1=R_2\geq\dfrac{\pi}{2}$. D'autre part la fonction tan n'étant pas définie ni prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$, $R_2\leq\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{R_1 = R_2 = \frac{\pi}{2}\ \cdot}$$

I.4.

I.4.1. Pour tous complexes x et z, $\mathrm{e}^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} z^n$ et si $|z| < 2\pi$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$.
En utilisant le théorème relatif au produit de deux séries entières, on en déduit que pour tous complexes x et z tels que $|z| < 2\pi$,

$$f(z)\mathrm{e}^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \text{ où pour tout } n,\ c_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \frac{B_{n-p}}{(n-p)!}\ \cdot$$

On a alors $f(z)\mathrm{e}^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x) \frac{z^n}{n!}$ où pour tout entier n et pour tout réel x,

$$\beta_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p x^p B_{n-p}.$$

Pour tout entier n, β_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\mathrm{C}_n^n B_0 = 1$.
$\beta_n(0) = \mathrm{C}_n^0 B_n = B_n$.

I.4.2. Soit $k \geq 0$ et $x \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\beta_{k+1}(x) - \beta_{k+1}(x) &= \sum_{p=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^p ((x+1)^p - x^p) B_{k+1-p} \\
&= \sum_{p=1}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^p \Big(\sum_{h=0}^{p-1} \mathrm{C}_p^h x^h\Big) B_{k+1-p} \\
&= \sum_{h=0}^{k} x^h \Big(\sum_{p=h+1}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^p \mathrm{C}_p^h B_{k+1-p}\Big) \\
&= \sum_{h=0}^{k} x^h \Big(\sum_{p=h+1}^{k+1} \frac{(k+1)!}{p!(k+1-p)!} \frac{p!}{h!(p-h)!} B_{k+1-p}\Big) \\
&= \sum_{h=0}^{k} \mathrm{C}_{k+1}^h x^h \Big(\sum_{p=h+1}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1-h}^{p-h} B_{k+1-p}\Big) \\
&= \sum_{h=0}^{k} \mathrm{C}_{k+1}^h x^h \Big(\sum_{l=1}^{k+1-h} \mathrm{C}_{k+1-h}^{l} B_{k+1-h-l}\Big) \\
&= \sum_{h=0}^{k} \mathrm{C}_{k+1}^h x^h \Big(\sum_{q=0}^{k-h} \mathrm{C}_{k+1-h}^{q} B_{q}\Big)
\end{aligned}$$

Or si $n \geq 1$, $\sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^q B_q = 0$. Dans la somme précédente reste donc uniquement le terme correspondant à $h = k$, de valeur $\mathrm{C}_{k+1}^k x^k B_0 = (k+1)x^k$.

$$\boxed{\beta_{k+1}(x+1) - \beta_{k+1}(x) = (k+1)x^k.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_{k,N} = \sum_{n=1}^{N} n^k = \sum_{n=0}^{N} n^k$.

$S_{k,N} = \frac{1}{k+1} \sum_{n=0}^{N} (\beta_{k+1}(n+1) - \beta_{k+1}(n)) = \frac{1}{k+1} (\beta_{k+1}(N+1) - \beta_{k+1}(0))$.
Comme $\beta_{k+1}(0) = B_{k+1}$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} n^k = \frac{1}{k+1}\Big(\beta_{k+1}(N+1) - B_{k+1}\Big)}$$

I.4.3. Pour tous complexes x et z avec $|\,z\,| < 2\pi$, $|\,-z\,| < 2\pi$ et $h(1-x,-z) = f(-z)\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^{xz}$.
Or $f(-z)\mathrm{e}^{-z} = -\dfrac{z\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{-z}-1} = -\dfrac{z}{1-\mathrm{e}^{z}} = f(z)$. D'où

$$\boxed{h(1-x,-z) = h(x,z)}$$

Soit $x \in \mathbb{C}$, fixé. L'égalité précédente et l'unicité du développement en série entière de $z \mapsto h(x,z)$ prouve que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n(1-x) = (-1)^n \beta_n(x)}$$

En particulier

$$\boxed{\beta_n(1) = (-1)^n \beta_n(0) = (-1)^n B_n.}$$

I.4.4. En admettant que l'on peut dériver terme à terme, pour tout réel x et tout $z \in D(0, 2\pi)$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(x)\,\frac{z^n}{n!}\cdot$$

Mais on a aussi $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,z) = zh(x,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x)\,\frac{z^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{n-1}(x)\,n\,\frac{z^n}{n!}\cdot$ Par unicité du développement en série entière, à x fixé de $z \mapsto zh(x,z)$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n'(x) = n\beta_{n-1}(x)$. Comme ce résultat est valable pour tout réel x, on obtient l'égalité des deux polynômes.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_{n+1}' = (n+1)\beta_n.}$$

Soit $n \geq 1$.
$I_n = \displaystyle\int_0^1 \beta_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \beta_{n+1}'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\left(\beta_{n+1}(1) - \beta_{n+1}(0)\right).$
$\beta_{n+1}(1) - \beta_{n+1}(0) = ((-1)^{n+1} - 1)B_{n+1}$
Si n est pair, $n+1$ est un entier impair supérieur à 2, donc $B_{n+1} = 0$.
Si n est impair, $(-1)^{n+1} - 1 = 0$ Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 1,\ \textstyle\int_0^1 \beta_n(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

Partie II

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après I.4.1, $\beta_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p x^p B_{n-p}$. On connait B_0, B_1, B_2, B_3 calculés en I.2.4.

On en déduit

$$\boxed{\beta_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad \beta_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \beta_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.}$$

remarque *on aurait pu également déterminer ces trois polynômes en utilisant uniquement les formules de récurrence (i) et (ii). Le texte de la question est ici un peu ambigu.*

II.2.
II.2.1. D'après I 4 3, $\beta_2(1-x) = \beta_2(x)$. On en déduit que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $\Phi_2(x) = \Phi_2(2\pi - x)$, puis par 2π périodicité que Φ_2 est paire.

Comme Φ_2 est 2π périodique, continue sur $[0, 2\pi[$, pour montrer la continuité sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que Φ_2 est continue à gauche en 0, ce qui est assuré par la parité de Φ_2 : $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \Phi_2(y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Phi_2(-x) = \Phi_2(0)$.

II.2.2. Comme Φ_2 est paire, les coefficients $b_n(\Phi_2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(\Phi_2) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \Phi_2(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{1/2} \beta_2(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x$, en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{t}{2\pi}\cdot$

$$\boxed{a_0(\Phi_2) = 0}$$

Pour $n \geq 1$, après deux intégrations par parties,

$$\boxed{a_n(\Phi_2) = \frac{1}{n^2\pi^2}\cdot}$$

La fonction Φ_2 est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de Φ_2 converge normalement vers Φ_2 sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2\pi^2}\cdot}$$

II.3.

II.3.1. Montrons que pour tout $k \geq 2$, Φ_k est continue sur $\mathbb{R}$.

Le raisonnement est le même qu'en II.2.1 : soit $k \geq 2$, la fonction Φ_k est 2π périodique et continue sur $[0, 2\pi[$ car β_k est continue sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'établir la continuité en 0, à gauche .

Or $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \Phi_k(y) = \lim\limits_{\substack{y\to 2\pi\\ y<2\pi}} \Phi_k(y) = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \beta_k(t) = \beta_k(1)$.

Or $\beta_k(1) = (-1)^k\beta_k(0) = (-1)^k B_k$ d'après I.4.3. Si k est pair, $\beta_k(1) = \beta_k(0)$. Si k est impair, comme $k \geq 2$, $B_k = 0$ et $\beta_k(1) = \beta_k(0) = 0$.

On a donc $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y<0}} \Phi_k(y) = \Phi_k(0)$, ce qui assure la continuité à gauche de Φ_k en 0 et la continuité de Φ_k sur $\mathbb{R}$.

Soit $k \geq 3$. Φ_k est dérivable sur $[0, 2\pi[$ de dérivée:

$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad \Phi_k'(x) = \dfrac{1}{2\pi}\,\beta_k'(\dfrac{x}{2\pi}) = \dfrac{k}{2\pi}\,\beta_{k-1}(\dfrac{x}{2\pi}) = \dfrac{k}{2\pi}\,\Phi_{k-1}(x)$.

Comme $k-1 \geq 2$, Φ_{k-1} est 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$. Φ_k est 2π périodique, dérivable sur $]0, 2\pi[$ et admet en 0 des dérivées à droite et à gauche, $\Phi_k' d(0) = \dfrac{k}{2\pi}\,\Phi_{k-1}(0)$ et $\Phi_k' g(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} \dfrac{k}{2\pi}\,\Phi_{k-1}(x) = \dfrac{k}{2\pi}\,\Phi_{k-1}(0)$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Pour } k \geq 3,\ \Phi_k \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \Phi_k' = \frac{k}{2\pi}\,\Phi_{k-1}.}$$

Montrons par récurrence sur $k \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante :

"Φ_k est de classe $\mathcal{C}^k$ et ${\Phi_k}^{(k-2)} = \dfrac{k!}{2^{k-1}\pi^{k-2}}\,\Phi_2$."

- On vient d'établir $\mathcal{P}_3$.
- Supposons $\mathcal{P}_k$ vérifiée pour un certain $k \geq 3$. De $\Phi_{k+1}' = \dfrac{k+1}{2\pi}\,\Phi_k$, on déduit que Φ_{k+1} est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et que $\Phi_{k+1}^{(k-1)} = \dfrac{k+1}{2\pi}\,{\Phi_k}^{(k-2)} = \dfrac{(k+1)!}{2^k\pi^{k-1}}\,\Phi_2$ par hypothèse de récurrence. $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée et la récurrence est établie.

II.3.2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction 2π périodique Φ_{2p} est de classe $\mathcal{C}^{2p-2}$ et $\Phi_{2p}^{(2p-2)} = \alpha_p\Phi_2$ en notant $\alpha_p = \dfrac{(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p-2}}\cdot$

Comme Φ_2 est paire, on en déduit que Φ_{2p} est paire (ce que l'on pouvait également déduire de I.4.3). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\Phi_{2p}) = 0$.

De plus les relations entre les coefficients de Fourier d'une fonction et ceux de ses dérivées donnent:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(\Phi_{2p}^{(2p-2)}) = (-1)^{p-1} n^{2p-2} a_n(\Phi_{2p}).$$

On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{a_n(\Phi_{2p}) = \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}n^{2p}}}$$

Enfin, $a_0(\Phi_{2p}) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \beta_{2p}(\frac{t}{2\pi})\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \beta_{2p}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

$$\boxed{a_0(\Phi_{2p}) = 0}$$

La fonction Φ_{2p}, pour $p \geq 1$ est 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$ de classe au moins $\mathcal{C}^1$ si $p \geq 2$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux si $p = 1$. D'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de Φ_{2p} converge normalement vers Φ_{2p} sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{2p}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}n^{2p}} \cos(nx)}$$

II.3.3. L'égalité précédente apliquée à $x = 0$ donne

$$\Phi_{2p}(0) = \beta_{2p}(0) = B_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} \cdot$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1}2^{2p-1}\pi^{2p}\beta_{2p}(0)}{(2p)!} \cdot}$$

Partie III

III.1. Soit $x > 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, $\dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-2} = \dfrac{1}{t^{2-x}} \cdot$ Comme $x > 1$, $2 - x < 1$ et cette fonction est intégrable sur $]0, 1]$ donc aussi $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}$ par comparaison.

En $+\infty$, $\dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{t^2})$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ et finalement intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.2. Notons $f : (x,t) \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{(x-1)\ln t}}{\mathrm{e}^t - 1} \cdot$

Par théorèmes d'opérations, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k f(x,t)$.

(pour $k = 0$, il s'agit de la fonction f).

Pour tous réels a et b tels que $1 < a < b$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$\forall t \in]0, 1], \quad |\, f(x,t)\,| \leq \frac{t^{a-1}}{\mathrm{e}^t - 1} = f(a,t)$$

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad |\, f(x,t)\,| \leq \frac{t^{b-1}}{\mathrm{e}^t - 1} = f(b,t)$$

Finalement, pour tout $x \in [a, b]$, $\forall t \in]0, +\infty[, \quad |\, f(x,t)\,| \leq f(a,t) + f(b,t)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $c > 1$, notons $\varphi_{k,c} : t \mapsto |\,(\ln t)^k f(c,t)\,|$.

• La fonction $\varphi_{k,c}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• $\varphi_{k,c}(t) \underset{t\to 0}{\sim} (|\ln t|)^k t^{c-2}$.

Soit α tel que $1<\alpha<c$, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} t^{-\alpha+2}\varphi_{k,c}(t)=0$ et comme $\alpha>1$, $t\mapsto t^{\alpha-2}$ est intégrable sur $]0,1]$. On en déduit que $\varphi_{k,c}$ est intégrable sur $]0,1]$.

• $\varphi_{k,c}(t) \underset{t\to +\infty}{\sim} (|\ln t|)^k t^{c-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $\varphi_{k,c}$ est donc intégrable sur $[1,+\infty[$ et finalement sur $]0,+\infty[$.

bilan:
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tous réels a et b tels que $1<a<b$ et pour tout $x\in[a,b]$,

$$\forall t\in]0,+\infty[,\quad |f(x,t)|\leq \varphi_{k,a}(t)+\varphi_{k,b}(t)$$

où la fonction $\varphi_{k,a}+\varphi_{k,b}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions intégrables. La fonction f et toutes ses dérivées partielles (par rapport à x) sont continues et vérifient l'hypothèse de domination sur les segments de $]1,+\infty[$.
On déduit du théorème de dérivation relatif aux intégrales à paramètre que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.

III.3.

III.3.1. Soit x fixé, $x>1$, pour tout $t>0$, en écrivant $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t-1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$, comme $\mathrm{e}^{-t}\in]0,1[$, en utilisant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1+x}$ sur $]-1,1[$,

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}=\mathrm{e}^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}$$

et donc,

$$\frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}$$

III.3.2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>1$. La fonction $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}$ est continue sur $[0,+\infty[$. $(x-1>0)$.
En $+\infty$, comme $n\geq 1$, par croissances comparées, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui assure l'intégrabilité de cette fonction sur $[0,+\infty[$.

II.3.3. Remarquons tout d'abord que l'intégrabilité pour tout $x>1$ et pour tout $n\geq 1$ de $t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}$ assure l'existence sur $]1,+\infty[$ des fonctions Γ et Γ_n pour $n\geq 2$.
Soit $A>0$ et $n\geq 1$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$, effectuons le changement de variable $\mathcal{C}^1$, $u=nt$.

$$\int_0^A t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^x}\int_0^{nA}u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

puis en faisant tendre A vers $+\infty$, puisque les fonctions en présence sont intégrables,

$$\boxed{\forall n\geq 1,\quad \Gamma_n(x)=\frac{1}{n^x}\Gamma(x)}$$

III.3.4. Pour tout $x>1$, en utilisant III.3.1, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

Notons, pour tout $n\geq 1$, $u_n:t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-nt}$.

• Pour tout $n\geq 1$, u_n est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après III.3.2.

• La série de fonctions $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $h:t\mapsto\dfrac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t-1}$, continue sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $n\geq 0$, la fonction u_n est positive sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence pour les séries de fonctions positives sur un intervalle, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}u_n(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction limite h et on a dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}u_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$.

Or on sait d'après III.1 que h est intégrable, on en déduit alors que

$$\text{Pour tout } x > 1,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x).\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

De plus pour tout $x > 1$ la fonction continue, intégrable $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est à valeurs strictement positives sur $]0, +\infty[$, donc $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t > 0$. D'où

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 1, \quad \frac{F(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \cdot}$$

III.4.

III.4.1. Soit $k \geq 3$, ε et A deux réels strictement positifs.. En effectuant une intégration par parties dans $\displaystyle\int_\varepsilon^A t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_\varepsilon^A t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \varepsilon^{k-1}\mathrm{e}^{-\varepsilon} - A^{k-1}\mathrm{e}^{-A} + (k-1)\int_\varepsilon^A t^{k-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Comme les fonctions en présence sont intégrables sur $]0, +\infty[$, que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{k-1}\mathrm{e}^{-\varepsilon} = 0$, que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{k-1}\mathrm{e}^{-A} = 0$, par croissances comparées, en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1)}$$

Remarquons que la fonction Γ est définie en $x = 1$ et que le calcul précédent est encore valable pour $k = 2$.

III.4.2. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. Par récurrence facile,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma(k) = (k-1)!}$$

puis en utilisant III.3.4

$$\boxed{\forall k \geq 2, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{F(k)}{(k-1)!}}$$