

# CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE X 2006, MATH 1

## PREMIÈRE PARTIE

1. Si  $\gamma = 1$  on a  $f'(x) = f(x)$  et  $f(0) = \alpha$  ce qui est équivalent à  $f(x) = \alpha e^x$ .
2. Si  $\gamma = -1$  alors  $f'(x) = f(-x)$  d'où  $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$  par conséquent  $f$  s'écrit sous la forme  $f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ .  
 $f(0) = \alpha$  donne  $\lambda = \alpha$  puis  $f'(0) = f(0) = \alpha$  fournit  $\mu = \alpha$  donc, nécessairement,  $f$  s'écrit sous la forme  $f(x) = \alpha(\cos x + \sin x)$ .

Réciproque immédiate.

3. a) Soit  $a_n = \frac{\gamma^{n(n-1)/2}}{n!}$  alors  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\gamma^n}{n+1} \rightarrow 0$  donc le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est infini par conséquent,  $f_\gamma(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est absolument convergente pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et on peut dériver terme à terme.

$$\begin{aligned} f'_\gamma(x) &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{(n+1)n/2} \frac{x^n}{n!} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{(\gamma x)^n}{n!} = f_\gamma(\gamma x). \end{aligned}$$

Vu que  $f_\gamma(0) = \alpha$  alors la fonction  $f_\gamma$  est bien solution du système  $(C_{\gamma, \alpha})$ .

- b) Si  $|\gamma| > 1$  alors la série entière a un rayon de convergence nul.
4. a) On a  $(T_A g)(x) - (T_A h)(x) = \int_0^x (g-h)(\gamma t) dt$  donc, pour  $x \in [-A, A]$ , on obtient  $|(T_A g)(x) - (T_A h)(x)| \leq |x| \cdot \|g-h\| \leq A \|g-h\|$  d'où  $\|T_A g - T_A h\| \leq A \|g-h\|$ .  $T_A$  est lipschitzienne donc continue.
- b) Par double implication.
  - Si  $f$  dérivable est solution de  $(C_{\gamma, \alpha})$  alors  $f'(x) = f(\gamma x)$  est continue donc

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{=\alpha} = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f(\gamma t) dt$$

soit  $f = T_A f$  et ceci pour tout  $A > 0$ .

- Si  $f = T_A f$  pour tout  $A > 0$  alors  $f(x) = \alpha + \int_0^x f(\gamma t) dt$  donc  $f(0) = \alpha$  et, comme  $f$  est continue (dérivable), alors  $f'(x) = f(\gamma x)$ .
- c) Au a) on a déjà majoré  $|(T_A g)(x) - (T_A h)(x)|$  ce qui assure la propriété à l'ordre 1. On fait alors une récurrence sur  $n$  : si  $|(T_A^n g)(x) - (T_A^n h)(x)| \leq \gamma^{n(n-1)/2} \frac{|x|^n}{n!} \|g-h\|$  alors, en écrivant que  $T_A^{n+1} = T_A(T_A^n)$ , on arrive à

$$\begin{aligned} |(T_A^{n+1} g)(x) - (T_A^{n+1} h)(x)| &= \left| \int_0^x (T_A^n g)(\gamma t) - (T_A^n h)(\gamma t) dt \right| \leq \left| \int_0^x |(T_A^n g)(\gamma t) - (T_A^n h)(\gamma t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x \gamma^{n(n-1)/2} \frac{|\gamma t|^n}{n!} \|g-h\| dt \right| \leq \gamma^{n(n+1)/2} \left| \int_0^x \frac{|t|^n}{n!} dt \right| \cdot \|g-h\| \end{aligned}$$

d'où le résultat en intégrant.

- d) Pour  $x \in [-A, A]$  on a donc  $|(T_A^n g)(x) - (T_A^n h)(x)| \leq |\gamma|^{n(n-1)/2} \frac{A^n}{n!} \|g - h\|$  soit, en prenant la norme infinie sur  $[-A, A]$ ,

$$\|T_A^n g - T_A^n h\| \leq |\gamma|^{n(n-1)/2} \frac{A^n}{n!} \|g - h\| \leq \frac{A^n}{n!} \|g - h\|.$$

Montrons que  $n(A) = 3[A]$  convient :

- Soit  $u_n = \ln n! - n \ln n + n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) + 1 - (n+1) \ln(n+1) + n \ln n = 1 - n \ln(1 + 1/n) \geq 0$$

$$\text{car } \ln(1 + 1/n) \leq \frac{1}{n} \text{ donc } u_n \geq u_1 = 1 > 0.$$

- On a ainsi  $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$  or  $\frac{n(A)}{e} = \frac{3}{e}[A] > A$  donc  $n(A)! > A^{n(A)}$  et par

$$\text{conséquent, } \|T_A^{n(A)} g - T_A^{n(A)} h\| \leq k \|g - h\| \text{ avec } k = \frac{A^{n(A)}}{n(A)!} < 1.$$

- e) Soient  $g$  et  $h$  deux solutions de  $(C_{\gamma, \alpha})$  : on a  $T_A g = g$  et  $T_A h = h$  pour tout  $A > 0$  donc  $\|T_A^{n(A)} g - T_A^{n(A)} h\| = \|g - h\| \leq k \|g - h\|$  avec  $k < 1$  donc  $\|g - h\| = 0$  soit, pour tout  $x \in [-A, A]$ ,  $g(x) = h(x)$ .

Comme ceci est vrai pour tout  $A > 0$ , on en déduit que  $g = h$  sur  $\mathbb{R}$ .

5. a)  $f_\gamma(x)$ , pour  $x$  fixé, est une série entière de  $\gamma$  qui converge pour  $|\gamma| \leq 1$  donc  $\gamma \mapsto f_\gamma(x)$  est continue. En particulier  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} f_\gamma(x) = 1 + x$ .

- b) Posons  $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$  et  $u_n(\gamma, x) = \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$  alors

$$\frac{\partial^{p+q} u_n}{\partial \gamma^p \partial x^q}(\gamma, x) = \begin{cases} a_n(a_n - 1)(\dots)(a_n - p + 1) \gamma^{a_n - p} \frac{x^{n-q}}{(n-q)!} & \text{si } n \geq q \\ 0 & \text{si } n < q. \end{cases}$$

Pour  $(\gamma, x) \in [-1, 1] \times [-A, A]$  on a

$$\left| \frac{\partial^{p+q} u_n}{\partial \gamma^p \partial x^q}(\gamma, x) \right| \leq \underbrace{a_n(a_n - 1)(\dots)(a_n - p + 1)}_{\sim \frac{n^{2p}}{2^p}} \frac{A^{n-q}}{(n-q)!} = v_n(p, q) \text{ (pour } n \geq q).$$

Or  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{(n+1)^{2p}}{2^p} \times \frac{2^p}{n^{2p}} \frac{A}{n+1-q} \rightarrow 0$  donc  $\sum v_n(p, q)$  converge par conséquent  $\sum \frac{\partial^{p+q} u_n}{\partial \gamma^p \partial x^q}(\gamma, x)$  converge normalement sur  $[-1, 1] \times [-A, A]$ .

On fait alors une récurrence sur  $p+q$  pour montrer que  $\frac{\partial^{p+q} F}{\partial \gamma^p \partial x^q}$  existe et est continue :

- $p+q = 1$  est une conséquence immédiate du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions dont la série des dérivées converge normalement.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre  $n$ . Si  $p+q = n+1$  alors si  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$   $\frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial^n F}{\partial \gamma^{p-1} \partial x^q} \right)$  existe et est continue, de même pour  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^n F}{\partial \gamma^p \partial x^{q-1}} \right)$  (toujours le théorème de dérivation).

Grâce au théorème de Schwarz, on en déduit que la propriété est vraie à l'ordre  $n+1$  pour  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$ .

Dans le cas où (par exemple  $p = 0$ ) on utilise le théorème de dérivation par rapport à  $x$  à l'ordre  $n+1$ .

Conclusion : on peut affirmer que, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\frac{\partial^{p+q} F}{\partial \gamma^p \partial x^q}$  existe et est continue sur  $[-1, 1] \times [-A, A]$  et ceci pour tout  $A > 0$  donc  $F \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1] \times \mathbb{R})$ .

c) On distingue deux cas :

- Si  $x \geq 0$  alors  $f(x) \geq 0$  et  $f'(x) = f(\gamma x) \geq 0$  donc  $f$  est croissante.
- Si  $x \in [-1, 0]$ , on pose  $x = -y$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \gamma^{n(n-1)/2} \frac{y^n}{n!}$  qui est la somme d'une série alternée ( $u_n = \gamma^{n(n-1)/2} \frac{y^n}{n!}$  décroît vers 0) donc  $f(x) \geq 1 - y \geq 0$  et  $f'(x) = f(\gamma x) \geq 1 - \gamma y \geq 0$  donc, là aussi,  $f$  est croissante. En  $+\infty$ ,  $f(x) \geq 1 + x$  pour  $x \geq 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### DEUXIÈME PARTIE

6. Posons  $c_n = \frac{c_0}{\gamma^{n(n+1)/2}}$  et  $c_{-n} = \frac{c_0}{\gamma^{n(n-1)/2}}$  pour  $n \geq 0$  (i.e.  $c_n = \frac{c_0}{\gamma^{n(n+1)/2}}$ ).

- Vérifions (i) : si  $n \geq 0$ ,  $|c_n| \gamma^n = \frac{|c_0|}{\gamma^{n(n-1)/2}}$  donc  $\frac{|c_{n+1}| \gamma^{n+1}}{|c_n| \gamma^n} = \frac{1}{\gamma^n} \rightarrow 0$ ,  $\sum |c_n| \gamma^n$  converge.

De même  $|c_{-n}| \gamma^n = \frac{|c_0|}{\gamma^{n(n-3)/2}}$  et  $\sum |c_{-n}| \gamma^n$  converge.

- Vérifions (ii) :  $\sum |c_n|$  et  $\sum |c_{-n}|$  convergent et comme  $e^{\gamma^n x} \leq 1$  pour  $x \in \mathbb{R}_-$ , les séries  $\sum c_n e^{\gamma^n x}$ ,  $\sum c_{-n} e^{\gamma^n x}$  convergent et les séries des dérivées convergent normalement grâce à (i) donc  $\varphi$  est dérivable et

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{c_n \gamma^n}_{=c_{n-1}} e^{\gamma^n x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{c_{-n} \gamma^{-n}}_{=c_{-n-1}} e^{\gamma^n x} + \underbrace{c_0}_{=c_1} e^x \\ &= \varphi(\gamma x). \end{aligned}$$

7.  $\varphi(0) = c_0 \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{n(n+1)/2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{n(n-1)/2}} \right] = 2c_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{n(n+1)/2}}}_{=s_\gamma}$  avec  $s_\gamma > 0$ . Il suffit alors

de prendre  $c_0 = \frac{\alpha}{2s_\gamma}$ .

8. On pose cette fois-ci  $c_n = (-1)^n \frac{c_0}{\gamma^{n(n+1)/2}}$  et  $c_{-n} = (-1)^n \frac{c_0}{\gamma^{n(n-1)/2}}$ . La condition (i) est satisfaite, (ii) est remplacée par  $\sum c_n e^{-\gamma^n x}$  est absolument convergente pour tout  $x \in [0, +\infty[$  et, si  $\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-\gamma^n x}$ , alors  $\psi$  est dérivable et

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{-c_n \gamma^n}_{=c_{n-1}} e^{-\gamma^n x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{-c_{-n} \gamma^{-n}}_{=c_{-n-1}} e^{-\gamma^n x} + \underbrace{-c_0}_{=c_1} e^x = \psi(\gamma x).$$

Cependant  $\psi(0) = c_0 \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma^{n(n+1)/2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma^{n(n-1)/2}} \right] = 0$ .

### TROISIÈME PARTIE

9. Par une récurrence immédiate, on a  $f^{(n)}(x) = \gamma^{n(n-1)/2} f(\gamma^n x)$  et, en remplaçant  $n$  par  $n - k$ , on obtient  $f^{(n-k)}(\gamma^k x) = \gamma^{(n-k)(n-k-1)/2} f(\gamma^n x)$ . On en déduit alors que  $f^{(n)}(x) = \gamma^{n(n-1)/2 - (n-k)(n-k-1)/2} f^{(n-k)}(\gamma^k x)$  et la relation demandée est une conséquence de l'égalité  $n(n-1) - (n-k)(n-k-1) = 2kn - k(k+1)$ .
10. On remarque tout d'abord que  $G_\gamma \subset \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$  donc  $\Psi$  est bien définie et c'est une application linéaire.

Supposons que  $\Psi(f) = 0$  i.e.  $f(x) = 0$  pour  $x \in [1, \gamma]$ .

- Par récurrence sur  $p$ , montrons que  $f = 0$  sur  $I_{(-p)}$  :

– Si  $p = 0$ , c'est vrai par hypothèse.

– Supposons que  $f = 0$  sur  $I_{(-p)}$  alors  $f'(x) = f(\gamma x)$  entraîne que  $f'(x) = 0$  sur  $I_{(-p-1)}$ , et comme  $f(\gamma^{-p}) = 0$  alors  $f(x) = 0$  sur  $I_{(-p-1)}$ .

- Montrons que  $f = 0$  sur  $I_p$  : soit  $y \in I_p$ ,  $y = \gamma^p x$  où  $x \in I_{(0)}$  alors  $f^{(p)}(x) = \gamma^{p(p-1)/2} f(\gamma^p x) = 0$  donc  $f(y) = 0$ .

Conclusion :  $f = 0$  sur  $\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} I(p) = ]0, +\infty[$  soit  $\Psi$  est injective.

11. \* Si  $g = \Psi(f)$  alors  $f^{(n)}(x) = \gamma^{n-1} f^{(n-1)}(x)$  et, en appliquant ceci à  $x = 1$ , on trouve

$$g^{(n)}(1) = \gamma^{n-1} g^{(n-1)}(\gamma) \quad (\Gamma)$$

\* Réciproquement : soit  $g \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)})$  vérifiant les conditions  $(\Gamma)$ .

- On pose  $f(\gamma x) = g'(x)$  et  $f(x) = g(x)$  pour  $x \in I_{(0)} = [1, \gamma]$ . Pour montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)} \cup I_{(1)})$ , il suffit de prouver que le branchement en  $\gamma$  est  $\mathcal{C}^\infty$  à l'aide du théorème du prolongement dérivable soit encore que  $f^{(n)}(x)$  admet une limite quand  $x \rightarrow \gamma$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

La limite à gauche en  $\gamma$  existe et vaut  $g^{(n)}(\gamma)$ , il suffit de prouver qu'il en est de même pour la limite à droite.

Lorsque  $x \rightarrow 1^+$ , on a  $\gamma^n f^{(n)}(\gamma x) = g^{(n+1)}(x) \rightarrow g^{(n+1)}(1) = \gamma^n g^{(n)}(\gamma)$ .

$f \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)} \cup I_{(1)})$  et par les mêmes arguments, on prolonge  $f$  à une fonction de  $\mathcal{C}^\infty([1, +\infty[)$  qui vérifie  $f'(x) = f(\gamma x)$ .

- Pour  $x \in I_{(-1)} = [1/\gamma, 1]$ , on pose  $f(x) = g(1) - \int_x^1 g(\gamma t) dt$ .  $f'(x) = g(\gamma x) = f(\gamma x)$  et, comme ci-dessus, on montre que  $f \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)} \cup I_{(-1)})$  puis que  $f$  se prolonge en une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, \gamma[$ .

Conclusion : on a construit une fonction  $f \in G_\gamma$  telle que  $\Psi(f) = g$ .

12. a) D'une manière générale on a  $f^{(p)}(x) = \gamma^{p(p-1)/2} f(\gamma^p x)$  d'où la relation demandée en l'appliquant à  $x \in I_{(-p)}$ .

Si  $x = \gamma^{-p}$  alors  $f^{(p)}(\gamma^{-p}) = \gamma^{p(p-1)/2} f(1) = 0$ , de même,  $f^{(k)}(x) = \gamma^{k(k-1)/2} f(\gamma^k x)$  et en l'appliquant à  $x = \gamma^{-p}$  on obtient  $f^{(k)}(\gamma^{-p}) = f_{(-p)}^{(k)}(\gamma^{-p}) = \gamma^{k(k-1)/2} f(\gamma^{k-p}) = 0$  car  $k - p \leq 0$ .

b) On écrit la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\gamma^{-p}) + \dots + \frac{(x - \gamma^{-p})^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\gamma^{-p}) + \frac{1}{(p-1)!} \int_{\gamma^{-p}}^x (x-t)^{p-1} f^{(p)}(t) dt \\ &= q_p \int_{\gamma^{-p}}^x (x-t)^{p-1} f(\gamma^p t) dt \text{ avec } q_p = \frac{\gamma^{p(p-1)/2}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

et on applique cette formule à  $x \in I_{(-p)}$ .

- c) Si  $x = \gamma^{-p+1}$  on a  $f_{(-p)}(\gamma^{-p+1}) = 0 = q_p \int_{\gamma^{-p}}^{\gamma^{-p+1}} (\gamma^{-p+1} - t)^{p-1} f_{(0)}(\gamma^p t) dt$ . On pose

$u = \gamma^p t$  d'où  $0 = \gamma^{-p} \int_1^\gamma (\gamma - u)^{p-1} f_{(0)}(u) \gamma^{-p} du$  soit  $\int_1^\gamma (\gamma - u)^{p-1} f_{(0)}(u) du = 0$ .

- d) On approche alors  $f_{(0)}$  par une suite de polynômes sur  $[1, \gamma]$ . Comme  $(\gamma - X)^{p-1}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$  alors, par linéarité,  $\int_1^\gamma P(t) f_{(0)}(t) dt = 0$  pour tout polynôme.

Si  $P_n \xrightarrow{C.U.}_{I_{(0)}} f_{(0)}$  alors, comme  $f$  est bornée sur  $[1, \gamma]$ ,  $P_n f \xrightarrow{C.U.}_{I_{(0)}} f_{(0)}^2$  donc

$$0 = \int_1^\gamma P_n(t) f_{(0)}(t) dt \rightarrow \int_1^\gamma f_{(0)}^2(t) dt = 0.$$

Comme  $f$  est continue alors  $f_{(0)} = 0$  et, par injectivité de  $\Psi$ ,  $f = 0$ .