ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2001

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Première partie

On désigne par S le plan complexe $\mathbf{C}$ privé du sous-ensemble $-\mathbf{N}-1/2 = \{-1/2, -3/2, \dots\}$. Pour tout s dans S on note (E_s) l'équation différentielle

$$2x(1-x)f''(x) + \Big(2s+1-(2s+3)x\Big)f'(x) - sf(x) = 0 \ .$$

On cherche une solution de (E_s) sous la forme d'une série entière

$$f_s(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(s)x^n \quad \text{avec} \quad a_0 = 1 \ .$$

1. Écrire $a_{n+1}(s)$ en fonction de $a_n(s)$.

2. Déterminer la limite de $\dfrac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)}$ lorsque s n'est pas un entier négatif ou nul.

3. Montrer que le rayon de convergence de la série est égal à 1 ou à $+\infty$ et que sa somme $f_s(x)$ est effectivement une solution de (E_s).

4. Montrer que la fonction $(s,x) \mapsto f_s(x)$ est continue sur $S\times]-1,1[$.

5. On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E'_s) \qquad t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t) + s(1-s)(1-t^2)F(t) = 0 \quad , \quad t \in]0,1[\ .$$

a) Ramener sa résolution à celle de (E_s) en cherchant $F(t)$ sous la forme $t^s f(t^2)$. [On rappelle que $\dfrac{\mathrm{d}t^s}{\mathrm{d}t} = st^{s-1}$.]

b) Montrer que, si s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$, les fonctions $\Phi_s(t) = t^s f_s(t^2)$ et $\Phi_{1-s}(t) = t^{1-s} f_{1-s}(t^2)$ forment une base de l'espace des solutions de (E'_s).

Deuxième partie

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $y > 0$; on pose $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\, z = y$.

6. Démontrer les résultats suivants :

a) Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, le nombre complexe $\dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$ est bien défini et appartient à $\mathcal{H}$ (on précisera sa partie imaginaire).

b) Si l'on pose $A_\theta(z) = \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$, on obtient une action du groupe additif $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{H}$.

c) La fonction réelle sur $\mathcal{H}$: $z \mapsto c(z) = \dfrac{|z|^2 + 1}{2\ \mathrm{Im}\ z}$ est invariante par les transformations A_θ, c'est-à-dire $c\Big(A_\theta(z)\Big) = c(z) \quad \forall z \in \mathcal{H},\ \forall \theta \in \mathbf{R}$.

d) Si z est différent de i, on a $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$ si et seulement si $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$.

7. On fixe un point z_0 de $\mathcal{H}$, distinct de i.

a) Vérifier que l'orbite de z_0 sous l'action du groupe $\mathbf{R}$ est incluse dans le cercle de centre $ic(z_0)$ et de rayon $(c(z_0)^2 - 1)^{1/2}$.

b) Montrer que l'orbite de z_0 est égale à ce cercle.

8. On définit une application indéfiniment différentiable U de $]0,1[\times\mathbf{R}$ dans $\mathcal{H}$ par $U(t,\theta) = A_\theta(it)$.

a) Calculer le déterminant jacobien de U, qu'on notera $J(t,\theta)$.

[On utilisera la formule $J(t,\theta) = \mathrm{Im}\ \left(\dfrac{\overline{\partial U}}{\partial t}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right)$].

b) Démontrer les assertions suivantes :

(1) $U(]0,1[\times\mathbf{R})$ est égal à l'ensemble $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ privé du point i ;

(2) on a $U(t,\theta) = U(t',\theta')$ si et seulement si $t = t'$ et $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$.

Troisième partie

On désigne par $C^\infty(\mathcal{H}')$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur $\mathcal{H}'$ et par $C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\text{per}}$ celui des fonctions de classe C^∞ sur $]0,1[\times\mathbf{R}$ qui sont périodiques de période π par rapport à θ.

9. Montrer qu'en associant à toute fonction φ de $C^\infty(\mathcal{H}')$ la fonction $\psi = \varphi\circ U$, on obtient un isomorphisme, qu'on notera V, de $C^\infty(\mathcal{H}')$ sur $C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\text{per}}$.

On considère l'opérateur différentiel sur $\mathcal{H}'$ défini par

$$D = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ ;$$

on admettra que, pour toute $\varphi\in C^\infty(\mathcal{H}')$ et tout $\theta\in\mathbf{R}$, on a $D(\varphi\circ A_\theta) = D(\varphi)\circ A_\theta$.

On désigne par $\widetilde{D}$ l'endomorphisme de $C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\text{per}}$, défini par

$$\widetilde{D} = V\circ D\circ V^{-1} \ .$$

10. Pour tout élément (t,θ') de $]0,1[\times\mathbf{R}$ et tout $\theta\in\mathbf{R}$, on pose :

$$\tau_\theta(t,\theta') = (t,\theta+\theta') \ .$$

Vérifier que l'on a :

a) $V(\varphi)\circ\tau_\theta = V(\varphi\circ A_\theta)$ pour $\varphi\in C^\infty(\mathcal{H}')\ ,\ \theta\in\mathbf{R}$.

b) $\widetilde{D}(\psi\circ\tau_\theta) = \widetilde{D}(\psi)\circ\tau_\theta$ pour $\psi\in C^\infty(]0,1[\times\mathbf{R})_{\text{per}}\ ,\ \theta\in\mathbf{R}$.

On désigne par s un nombre complexe et par φ_s la fonction sur $\mathcal{H}$ définie par

$$\varphi_s(z) = \int_0^\pi (\text{Im } A_\theta(z))^s \mathrm{d}\theta \ .$$

11. Montrer que φ_s est de classe C^∞, est invariante par les A_θ, et est solution de l'équation $D(\varphi_s) = s(s-1)\varphi_s$.

[On pourra considérer la fonction $\omega(z) = (\text{Im } z)^s$.]

12. On définit une fonction F_s sur $]0,+\infty[$ par $F_s(t) = \varphi_s(it)$.

Comparer $F_s(t)$ et $F_s\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

13. Montrer que $F_s = F_{1-s}$.

[On pourra faire le changement de variable $\cot\theta = u$ dans l'intégrale définissant $F_s(t)$].

On suppose maintenant que s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$.

On pourra admettre que, si une fonction ψ est de la forme $\psi(t,\theta) = F(t)$, on a

$$\widetilde{D}(\psi)(t,\theta) = \frac{1}{1-t^2}[t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t)] \ .$$

14. Démontrer l'existence d'une famille de nombres complexes λ_s tels que l'on ait

$$F_s = \lambda_s \Phi_s + \lambda_{1-s}\Phi_{1-s}$$

(les fonctions Φ_s et Φ_{1-s} ont été définies à la question **5.b)**.

15. Supposant $\operatorname{Re} s < 1/2$, exprimer λ_s sous la forme d'une intégrale sur l'intervalle $]0,\pi[$.

Nota : L'ensemble $\mathcal{H}$ est appelé *demi-plan de Poincaré* et est le cadre d'une géométrie non euclidienne ; les transformations $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d réels et $ad - bc = 1$) jouent un rôle analogue à celui des déplacements du plan euclidien, les transformations A_θ un rôle analogue à celui des rotations. Enfin l'opérateur différentiel D est l'analogue du laplacien.

* *
*