

SADIK Omar CPGE FES Corrigé du concours Mines ponts 2015

A. Opérateur de Volterra

1) On a $V(f)' = f$ et $V^*(f)' = -f$

Par intégration par parties

$$\langle V(f), g \rangle = -[V(f)V^*(g)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f(t)V^*(g)(t)dt = \langle f, V^*(g) \rangle. \text{ car } V(f)(0) = V^*(g)(\pi/2) = 0.$$

2) Soient $f, g \in E$, par application de 1) et que \langle, \rangle est un produit scalaire on obtient :

$$\langle V^* \circ V(f), g \rangle = \langle g, V^* \circ V(f) \rangle = \langle V(g), V(f) \rangle = \langle V(f), V(g) \rangle = \langle f, V^* \circ V(g) \rangle. \text{ Donc } V^* \circ V \text{ est un endomorphisme symétrique.}$$

De plus $\langle V^* \circ V(f), f \rangle = \langle V(f), V(f) \rangle = \|V(f)\|^2$ qui est positive, et si on suppose que $\langle V^* \circ V(f), f \rangle = 0$, alors $V(f)$ est nulle, donc $V(f)' = f = 0$, alors $V^* \circ V$ est défini positif.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ qui existe car elle est symétrique, il existe alors f non nulle de E telle que $V^* \circ V(f) = \lambda f$, alors :

$$\langle V^* \circ V(f), f \rangle = \langle \lambda f, f \rangle = \lambda \langle f, f \rangle.$$

Comme les deux quantités $\langle V^* \circ V(f), f \rangle$ et $\langle f, f \rangle$ sont strictement positif, alors $\lambda > 0$.

3) On a alors $V^* \circ V(f)(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.

Comme $V^* \circ V(f_\lambda)$ est \mathcal{C}^1 et $(V^* \circ V(f_\lambda))' = -(V(f_\lambda))$ et puisque $V(f_\lambda)$ est \mathcal{C}^1 aussi et $V(f_\lambda)' = f_\lambda$:

$$\text{alors } f_\lambda = \frac{1}{\lambda} V^* \circ V(f)(f_\lambda) \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } \lambda f_\lambda'' = -f_\lambda.$$

De plus $V^* \circ V(f)(\pi/2) = 0$ et que $V(f)(0) = 0$, alors $f_\lambda(\pi/2) = f_\lambda'(0) = 0$.

4) D'après la question précédente, si λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ alors f_λ vérifie

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{\lambda}y & = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = y(0) & = 0 \end{cases}$$

Réciproquement si f_λ vérifie

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{\lambda}y & = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = y(0) & = 0 \end{cases}$$

Comme $(V^* \circ V(f_\lambda))'' = -f_\lambda$, alors $(\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda))'' = 0$

Donc $(\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda))' = cte$, en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, $cte = 0$

Alors $\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda) = cte$, en évaluant en 0, $cte = 0$, par conséquent $\lambda f_\lambda - V^* \circ V(f_\lambda) = 0$

Ainsi λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement si $f_\lambda \in \text{vect}(x \rightarrow \cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x), x \rightarrow \sin(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x))$ et $f_\lambda(\pi/2) = 0 = f'_\lambda(0)$ ceci est équivalent à $f_\lambda \in$

$\text{vect}(x \rightarrow \cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x))$ et $f_\lambda(\pi/2) = 0 = f'_\lambda(0)$ si et seulement si $\cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{2}) =$

0 si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tq $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$ si et seulement si il

existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}$.

et dans ce cas $E_{\frac{1}{(2n+1)^2}} = \text{vect}(x \mapsto \cos((2n+1)x))$ qui est de dimension 1.

B. Théorème d'approximation de Weirstrass

5) Il est évident que $S_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ et que S_n suit une loi binômiale de paramètres (n, x) , alors $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(S_n = k) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

l'espérance est linéaire donc $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = nx$, et $V(X_k) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$

car les X_k sont mutuellement indépendantes, donc $V(S_n) = nx(1-x)$.

6) On $\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} x^k (1-x)^{n-k} = P(\bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} (S_n = k))$

Soit $\omega \in \Omega$, alors :

$$\omega \in \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} (S_n = k) \implies \exists k \in \{0, 1, \dots, n\}, S_n(\omega) = k \text{ et } |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha$$

$$\implies |\frac{S_n(\omega)}{n} - x| \geq \alpha$$

$$\implies \omega \in (|\frac{S_n}{n} - x| \geq \alpha)$$

Donc $\bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} (S_n = k) \subset (|\frac{S_n}{n} - x| \geq \alpha)$, donc

$$P(\bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} (S_n = k)) \leq P(|\frac{S_n}{n} - x| \geq \alpha)$$

Or $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha\right) = P(|S_n - nx| \geq n\alpha) = P(|S_n - E(S_n)| \geq n\alpha) \leq \frac{V(S_n)}{n^2\alpha^2}$

c'est d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchibychév.

Mais $\frac{V(S_n)}{n^2\alpha^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$ alors l'inégalité demandée.

7) D'une part $f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(x)$, car $(S_n = k)_{0 \leq k \leq n}$ est un sys-

tème complet d'événements, alors : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Et $E(S_n) = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, donc : $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} P(S_n = k)$

Par application du théorème de Transfert, on a :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

Donc

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$$

f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc uniformément continue, alors pour $\epsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq $|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

D'autre part si on considère

$I = \left\{k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\right\}$ et $J = \left\{k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha\right\}$, on a $I \cup J = \{0, 1, \dots, n\}$ et $I \cap J = \emptyset$.

Donc :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| + \sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2 \|f\|_{\infty} \sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \|f\|_{\infty} \sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \|f\|_{\infty} \frac{1}{4n\alpha^2} \end{aligned}$$

Or $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N \implies 2 \|f\|_{\infty} \frac{1}{4n\alpha^2} \leq \frac{\epsilon}{2}$

Donc $\sup_{x \in [0, 1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui donne la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur $[0, 1]$.

C. Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

8) Soit $m \in \mathbb{N}$, et $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} 2 \cos^m t &= (e^{it} + e^{-it})^m \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k e^{ik} e^{-i(m-k)} \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k e^{i(2k-m)} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} 2 \cos^m t &= (e^{it} + e^{-it})^m \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k e^{i(m-k)} e^{-ik} \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k e^{i(m-2k)} \end{aligned}$$

$$\text{Alors } 4 \cos^m t = \sum_{k=0}^m C_m^k [e^{i(m-2k)} + e^{i(2k-m)}] = 2 \sum_{k=0}^m C_m^k \cos(m-2k).$$

La parité de \cos affirme que $t \rightarrow \cos^m t \in F_m$

F_n est un sous espace vectoriel, alors $p(\cos) \in F_n$.

9) Pour $n \neq m$, on a :

$$\langle c_n, c_m \rangle = \int_0^\pi \cos nt \cos mt = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos((n+m)t) + \cos((m-n)t)] dt = 0$$

et que si $n = m \neq 0$, $\langle c_n, c_n \rangle = \pi/2$, enfin

si $n = m = 0$, alors $\langle c_0, c_0 \rangle = \pi$

$$\text{Alors : } \|c_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ pour } n \neq 0 \text{ et } \|c_0\| = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Donc } \alpha_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ pour } n \neq 0 \text{ et } \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Alors la suite $(\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale.

On a $\forall f \in G$, $\|f\|_G \leq \sqrt{\pi} \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)|$.

Soit $f \in E$, posons $g = f \circ \arccos$ qui est continue sur $[-1, 1]$.

$$\varepsilon > 0, \exists P \text{ polynôme tel que } \sup_{x \in [-1, 1]} |g(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{Donc } \sup_{t \in [0, \pi]} |f \circ \arccos(\cos t) - P(\cos t)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$$

Alors $\sup_{t \in [0, \pi]} |f \circ \arccos(\cos t) - P(\cos t)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$

C'est à dire $\sup_{t \in [0, \pi]} |f(t) - P(\cos t)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$,

Donc $\|f - P(\cos)\|_G \leq \varepsilon$, et si $\deg P = N$, alors d'après la question précédente $P(\cos) \in F_N$.

10) Or $\|f - P_{F_N}(f)\|_G \leq \|f - P(\cos)\|_G$, car $\|f - P_{F_n}(f)\|_G = \inf_{g \in F_n} \|f - g\|_G$.

Mais si $n \geq N$, alors $F_N \subset F_n$.

Donc $\|f - P_{F_n}(f)\|_G \leq \|f - P_{F_N}(f)\|_G \leq \varepsilon$, ce qui est demandée.

Si $(P_{F_n})_n$ converge uniformément vers g , alors $\|g - P_{F_n}(f)\|_G$ converge vers 0.

Et on a $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ converge vers 0, par unicité de la limite $f = g$.

11) On a $P_{F_n}(g_x) = \sum_{k=0}^n \langle g_x, \alpha_k c_k \rangle_G \alpha_k c_k = \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \langle g_x, c_k \rangle_G c_k$.

Reste à calculer

$$\begin{aligned} \langle g_x, c_k \rangle_G &= \int_0^\pi g_x(t) \cos(kt)(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} g_x(t) \cos(kt)(t) dt + \int_{\pi/2}^\pi g_x(t) \cos(kt)(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} g_x(t) \cos(kt)(t) dt - \int_{\pi/2}^\pi g_x(\pi - t) \cos(kt)(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} g_x(t) \cos(kt)(t) dt + (-1)^k \int_{\pi/2}^0 g_x(t) \cos(kt)(t) dt \quad \pi - t = u \\ &= \int_0^{\pi/2} g_x(t) \cos(kt)(t) dt - (-1)^k \int_0^{\pi/2} g_x(t) \cos(kt)(t) dt \\ &= (1 - (-1)^k) \int_0^{\pi/2} g_x(t) \cos(kt)(t) dt \end{aligned}$$

Donc pour $\langle g_x, c_{2k} \rangle_G = 0$, calculons

$$\langle g_x, c_{2k+1} \rangle = 2 \left(\int_0^x (\pi/2 - x) \cos((2k+1)t) dt + \int_x^{\pi/2} (\pi/2 - t) \cos((2k+1)t) dt \right)$$

On a $\int_0^x (\pi/2 - x) \cos((2k+1)t) dt = (\pi/2 - x) \frac{1}{(2k+1)} \sin((2k+1)x)$.

Et $\int_x^{\pi/2} (\pi/2 - t) \cos((2k+1)t) dt = \frac{\pi}{2(2k+1)} (\sin((2k+1)\pi/2) - \sin((2k+1)x)) - \int_x^{\pi/2} t \cos((2k+1)t) dt$

Et on a $\int_x^{\pi/2} t \cos((2k+1)t) dt = \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\pi}{2} \sin((2k+1)x) - x \sin((2k+1)x) \right) + \frac{1}{(2k+1)^2} \left(\cos(2k+1) \frac{\pi}{2} - \cos((2k+1)x) \right)$

En rassemblant ces résultats on trouve $\langle g_x, c_{2k+1} \rangle = \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$.

Donc $\forall t \in [0, \pi]; P_{F_n}(g_x)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t)$.

La série $\frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t)$ converge normalement, donc uniformément, alors par application de la question 10)

$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t) = g_x(t)$ pour tout $t \in [0, \pi]$

En particulier pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$\frac{\pi}{2} - \max(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \cos((2k+1)t)$

12) On a $(V^* \circ V(f))'' = -f$, posons $F(x) = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x, t)\right) f(t) dt$. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - \max(x, t)\right) f(t) dt + \int_x^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x, t)\right) f(t) dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(t) dt + \int_x^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t) dt \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \int_0^x f(t) dt + \int_x^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) f(t) dt \end{aligned}$$

Donc F est \mathcal{C}^1 et $F'(x) = -\int_0^x f(t) dt + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(x) - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(x) = -\int_0^x f(t) dt$

Donc F est \mathcal{C}^2 et $F''(x) = -f(x) = (V^* \circ V(f))''$, alors en tenant compte de $F(\pi/2) = V^* \circ V(f)(\pi/2) = 0$ et que $F'(0) = (V^* \circ V(f))'(0) = 0$, donc $F = V^* \circ V(f)$.

La série de fonctions continues $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t)$ converge normalement sur $[0, \pi]$, donc pour tout $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
V^* \circ V(f)(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t) f(t) dt \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t) f(t) dt
\end{aligned}$$

On prend alors $a_n(f) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t) f(t) dt$

D. Équations différentielles du type Sturm-liouville

13) $\langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(f) \cos((2m+1)x) \cos((2n+1)x) dx.$

Mais la série $\sum_{m \geq 0} a_m(f) \cos((2m+1)x) \cos((2n+1)x)$ de fonctions continues converge normalement sur $[0, \pi/2]$ donc :

$$\begin{aligned}
\langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(f) \cos((2m+1)x) \cos((2n+1)x) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(f) \int_0^{\pi/2} \cos((2m+1)x) \cos((2n+1)x) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_n(f) \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t) f(t) dt \\
&= \frac{1}{(2n+1)^2} \langle f, \varphi_n \rangle
\end{aligned}$$

14) On a $(V^* \circ V(g))'' = -g$ et $V^* \circ V(h)'' = -h.$

Supposons que g est solution de S , alors $g'' - \lambda(V^* \circ V(g))'' - (V^* \circ V(h))'' = 0$

Alors $g' - \lambda(V^* \circ V(g))' - (V^* \circ V(h))' = 0$ tenant compte de $(V^* \circ V(g))'(0) = g'(0) = 0$

et alors $g - \lambda(V^* \circ V(g)) - (V^* \circ V(h)) = 0$ tenant compte de $(V^* \circ V(g))'(\pi/2) = g'(\pi/2) = 0.$

Réciproquement si $g - \lambda(V^* \circ V(g)) - (V^* \circ V(h)) = 0$ alors g est \mathcal{C}^2 et en dérivant deux fois, on obtient le résultat.

Alors $\langle g, \varphi_n \rangle = \lambda \langle V^* \circ V(g), \varphi_n \rangle + \langle V^* \circ V(h), \varphi_n \rangle$, donc

$$\langle g, \varphi_n \rangle = \lambda \frac{1}{(2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle + \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle.$$

D'où la relation demandée.

Alors

$$\begin{aligned} g &= \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g) \cos((2n+1)t) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(h) \cos((2n+1)t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n(g) + a_n(h)) \cos((2n+1)t) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \lambda a_n(g) + a_n(h) &= \lambda \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} g(t) \cos((2n+1)t) dt + \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} h(t) \cos((2n+1)t) dt \\ &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle + \frac{2}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle \\ &= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}(2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g, \varphi_n \rangle \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \langle g, \varphi_n \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Donc } g = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos((2n+1)t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \langle g, \varphi_n \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

15) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \neq (2n+1)^2$, alors :

$$\langle g, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \text{ ceci d'après les relations de la question 14).}$$

$\langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$ est une fonction bornée sur $[0, \pi]$, donc la série donnée converge normalement sur $[0, \pi]$.

De plus la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$ est alors une solution de S.

16) Supposons que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = (2p+1)^2$, alors si $\langle h, \varphi_p \rangle \neq 0$, l'une des relations de la question 14) tombe en défaut donc S ne possède pas de solution.

Mais si $\langle h, \varphi_p \rangle = 0$, alors dans ce cas $\langle g, \varphi_p \rangle$ peut prendre une valeur arbitraire et dans ce cas S possède une infinité de solutions par exemple

$$g = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Pour vos remarques ...

sadikoulmeki@yahoo.fr