

A. Equations algébriques réciproques

1. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a $u_n(P) = X^n P \left(\frac{1}{X} \right) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$

u_n est linéaire (immédiat). $u_n^2(P) = u_n \left(\sum_{k=0}^n a_k X^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^n a_k X^k = P(X)$ pour tout $P \in E_n$

Donc u_n est une symétrie .

2. Soit $n = \deg(P)$, $\sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors

- $P \in \mathcal{P}$ si et seulement si $u_n(P) = P$ ce qui est équivalent à $a_{n-k} = a_k$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
- $P \in \mathcal{D}$ si et seulement si $u_n(P) = -P$ ce qui est équivalent à $a_{n-k} = -a_k$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

3. Notons que si $\deg(R) = n$, alors $R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ si et seulement si $X^n R \left(\frac{1}{X} \right) = \varepsilon R(X)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Ainsi x est une racine de $R \Leftrightarrow R(x) = 0 \Leftrightarrow x^n R \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow R \left(\frac{1}{x} \right) = 0$.

Si $R \in \mathcal{D}$, $R(X) = -X^n R \left(\frac{1}{X} \right)$ donc $R(1) = -R(1)$ ce qui donne que $R(1) = 0$.

Si $R \in \mathcal{P}$ et $n = \deg(R)$ est impair, alors $R(-1) = (-1)^n R(-1) = -R(-1)$ donc $R(-1) = 0$.

4. Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, avec $P = QR$, $\deg(Q) = n$ et $\deg(R) = m$, donc $p = m + n = \deg(Q)$.

- Supposons que $Q, R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, $\varepsilon Q(X) = X^n Q \left(\frac{1}{X} \right)$ et $\varepsilon' R(X) = X^m R \left(\frac{1}{X} \right)$ avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$ donc

$\varepsilon \varepsilon' X^p P \left(\frac{1}{X} \right) = \varepsilon X^n Q \left(\frac{1}{X} \right) \times \varepsilon' X^m R \left(\frac{1}{X} \right) = Q(X) R(X)$, donc $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$.

- Supposons que $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ et $Q \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, alors, il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$ tels que : $\varepsilon Q(X) = X^n Q \left(\frac{1}{X} \right)$ et $\varepsilon' P(X) = X^{m+n} P \left(\frac{1}{X} \right)$.

On a $\varepsilon' P(X) = X^{m+n} P \left(\frac{1}{X} \right)$ donc $\varepsilon' Q(X) R(X) = X^{m+n} Q \left(\frac{1}{X} \right) R \left(\frac{1}{X} \right) = X^m Q \left(\frac{1}{X} \right) X^n R \left(\frac{1}{X} \right) = \varepsilon Q(X) X^n R \left(\frac{1}{X} \right)$

Donc $\varepsilon' R(X) = \varepsilon X^n R \left(\frac{1}{X} \right)$, ce qui donne que $R(X) = \varepsilon' \varepsilon X^n R \left(\frac{1}{X} \right)$. ($\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$ car $\varepsilon \in \{-1, 1\}$).

Si $\varepsilon \varepsilon' = 1$ c'est-à-dire Q, R sont de même espèce, alors $Q \in \mathcal{P}$.

Si $\varepsilon \varepsilon' = -1$ c'est-à-dire Q, R sont d'espèces différentes, alors $Q \in \mathcal{D}$.

5. Soit $P \in \mathcal{P}$, on a $X - 1 \in \mathcal{D}$, d'après la question précédente, on a $(X - 1)P \in \mathcal{D}$
 Supposons que $D \in \mathcal{D}$, d'après 3°), 1 est une racine de P , donc on peut écrire $D = (X - 1)P$
 D'autre part, $D \in \mathcal{D}$ et $(X - 1) \in \mathcal{D}$, donc d'après la question précédente $P \in \mathcal{P}$.
6. De même si $\deg(P) = n$ est impair et $P \in \mathcal{P}$, alors d'après 3°), -1 est une racine de P , on peut écrire $P = (X + 1)D$
 on a $X + 1 \in \mathcal{P}$ et $P \in \mathcal{P}$, donc $D \in \mathcal{P}$.
 Réciproquement si $D \in \mathcal{P}$, on a $X + 1 \in \mathcal{P}$, donc $(X + 1)D \in \mathcal{P}$.

7. Remarquons que (*) $\left(X + \frac{1}{X}\right) \left(X^p + \frac{1}{X^p}\right) = X^{p+1} + \frac{1}{X^{p+1}} + X^{p-1} + \frac{1}{X^{p-1}}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Posons $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$, on a $\deg(P_n) = n$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est vérifiée, supposons que $X^k + \frac{1}{X^k} = P_k \left(X + \frac{1}{X}\right)$ pour tout $k \leq n$, alors

$$\text{d'après (*)}, P_{n+1} \left(X + \frac{1}{X}\right) = \left(X + \frac{1}{X}\right) \left(X^n + \frac{1}{X^n}\right) - \left(X^{n-1} + \frac{1}{X^{n-1}}\right) = X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}}$$

Reste à établir l'unicité. Supposons qu'il existe T_n tel que : $X^n + \frac{1}{X^n} = T_n \left(X + \frac{1}{X}\right) = P_n \left(X + \frac{1}{X}\right)$

alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ c'est-à-dire $T_n(2 \cos \theta) = P_n(2 \cos \theta)$

Les polynômes P_n et T_n coïncident sur une partie infinie de \mathbb{R} , donc $P_n = T_n$.

8. Posons $m = \deg(R)$, alors $R(X) = \varepsilon X^n R \left(\frac{1}{X}\right)$, si n est impair alors -1 serait une racine (question 3°) ce qui est absurde, donc n est pair. Si $\varepsilon = -1$ alors 1 serait une racine (question 3°), ce qui est absurde

Posons $m = 2n$, $R(X) = a_{2n}X^{2n} + \dots + a_0$ avec $a_0 = a_{2n} \neq 0$. On a $R \in \mathcal{P}$, donc $a_{2n-k} = a_k$, donc R peut s'écrire

$$R = a_0X^{2n} + a_1X^{2n-1} + \dots + a_{n-1}X^{n+1} + a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0X + a_0, \text{ donc}$$

$$R(X) = X^n \left[a_0 \left(X^n + \frac{1}{X^n} \right) + a_1 \left(X^{n-1} + \frac{1}{X^{n-1}} \right) + \dots + a_n \right] = X^n \left[a_0 P_n \left(X + \frac{1}{X} \right) + \dots + a_0 \right]$$

$$\text{Posons } P(X) = a_0 P_n(X) + a_1 P_{n-1}(X) + \dots + a_n, \text{ alors } R(X) = X^n P \left(X + \frac{1}{X} \right).$$

On a $R(0) = a_0 \neq 0$, donc :

$$\text{Ainsi } P(x) = 0 \text{ si et seulement si } P \left(x + \frac{1}{x} \right) = 0$$

On n'a pas unicité puisque λP vérifie aussi l'équivalence.

Si $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme qui ne s'annule pas AP vérifie aussi (exemple $A(X) = X^2 + 1$), donc il n'y a pas d'unicité du degré.

B. Un problème de dénombrement.

9. Si $(u_k)_{0 \leq k \leq i} \in S_{i,j}$ alors $0 \leq u_k \leq j$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, i\}$, donc $S_{i,j} \subset \{0, 1, \dots, j\}^i$, comme $\{0, 1, \dots, j\}^i$ est fini de cardinal $(j+1)^i$, donc $S_{i,j}$ est aussi fini. $S'_{i,j} = S_{0,j} \cup S_{1,j} \cup \dots \cup S_{i,j}$ donc fini.

Si $(u_k)_{0 \leq k \leq i+1} \in S_{i+1,j}$, alors $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \dots + u_{i+1} = j$, donc $u_0 + u_1 + \dots + u_i \leq j$ avec $u_0 = 1$

Ce qui donne que $(u_k)_{0 \leq k \leq i} \in S'_{i,j}$, donc $\phi : S_{i+1,j} \rightarrow S'_{i,j}$, $u = (u_k)_{0 \leq k \leq i+1} \mapsto u/\{0,1,\dots,i\}$ est bien définie .

ϕ est évident injective .

Soit $v = (v_0, v_1, \dots, v_i) \in S'_{i,j}$, Posons $u_k = v_k$ pour $0 \leq k \leq i$ et $u_{i+1} = j - (v_0 + v_1 + \dots + v_i)$, on a $v_0 + v_1 + \dots + v_i \leq j$, donc $u_{i+1} \in \mathbb{N}$, de plus $u_0 + \dots + u_{i+1} = 1$ et $u_0 = v_0 = 1$, donc $(u_k)_{0 \leq k \leq i+1} \in S_{i,j}$ et $\phi(u) = v$

Donc ϕ est surjective .

10. On a $S'_{i,j+1} = \{u = (u_0, u_1, \dots, u_i) / u_0 = 1 \text{ et } u_0 + u_1 + \dots + u_i \leq j + 1\}$, notons T_1 et T_2 les ensembles :

$$T_1 = \{u = (u_k) \in S'_{i,j+1} / u_0 + u_1 + \dots + u_i = j + 1\} \text{ et } T_2 = \{u = (u_k) \in S'_{i,j+1} / u_0 = 1 \text{ et } u_0 + u_1 + \dots + u_i < j + 1\}$$

$\{T_1, T_2\}$ est une partition de $S'_{i,j+1}$, $Card(T_1) = s_{i,j+1}$ et $Card(T_2) = s'_{i,j}$ donc $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$

On a $s'_{i+1,j+1} = s_{i+1,j+1} + s'_{i+1,j}$, D'autre part, d'après la question précédente, ϕ est bijective, donc $s'_{i,j} = s_{i+1,j}$

ce qui donne que $s_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1}$, donc : $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$.

11. On va faire récurrence sur $i + j = p$.

Pour $p = 0$ et $p = 1$ c'est immédiat à vérifier. Supposons que pour tout (i, j) tel que $i + j = p$

Soit (i, j) tel que $i + j = p + 1$, on a $s'_{i,j} = s'_{i-1,j} + s'_{i,j-1} = \binom{i+j-2}{i-1} + \binom{i+j-2}{i} = \binom{i+j-1}{i}$.

$$s_{i,j} = s'_{i,j} - s'_{i,j-1} = \binom{i+j-1}{i} - \binom{i+j-2}{i} = \binom{i+j-2}{i-1}$$

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices .

12. Si A est inversible, alors $A^{-1}(AB)A = BA$, AB et BA sont semblables, donc $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.
13. Si A n'est pas inversible, notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) complexes de A , supposons que $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_p|$, $0 \in Sp(A)$, donc $\lambda_1 = 0$. Pour k assez grand, on a

$$0 < \frac{1}{k} < |\lambda_2|,$$

donc $\frac{1}{k} \notin Sp(A)$, ainsi $A_k = A - \frac{1}{k}I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et d'après ce qui précède, on a .

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A_k B - \lambda I_n) = \det(BA_k - \lambda I_n)$, par continuité de $A \mapsto \det(A)$, on a :

$$\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.

D. Etude spectrale de certaines matrices .

14. On a $s_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} = s_{j,i}$ donc la matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable .

• Pour $n = 0$, $S = (1)$,

• Pour $n = 1$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Phi_S = X^2 - 3X + 1$, $P = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} & \sqrt{5} - 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

avec $\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}$.

• Pour $n = 2$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, à l'aide de maple, on a : $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 + \sqrt{15} & \sqrt{15} - 1 \\ 1 & 5 + \sqrt{15} & \sqrt{15} - 5 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \sqrt{15} \end{pmatrix}, \Phi_S = -(X^3 - 9X^2 + 9X - 1)$$

15. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la fonction $t \mapsto P(t) e^{-t}$ est continue et $P(t) e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc intégrable ainsi ψ est bien définie, les autres propriétés sont immédiates à vérifier.

16. C'est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, degrés échelonnés donc libre et puisque son cardinal est égal à $n + 1$

Donc c'est une base.

A l'aide d'une intégration par parties, on a : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$, donc $\psi(B_i, B_j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} = \binom{i+j}{i} = s_{i+1, j+1}$.

Donc $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = (s_{i+1, j+1})_{0 \leq i, j \leq n} = (s_{i, j})_{1 \leq i, j \leq n+1} S$ et comme ψ est définie positive, donc S est aussi définie positive.

Le rang de S et de S' sont égaux à est égale à $n + 1$.

17. D'après la formule de Leibniz, $f_i^{(j)}(t)$ est de la forme $Q_j(t) e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^k}\right)$.

On a $f_i^{(i)}(t) = \sum_{p=0}^i C_i^p (t^i)^{(p)} (e^{-t})^{(i-p)} = \left(\sum_{p=0}^i \frac{(-1)^{i-p} i! C_i^p}{(i-p)!} t^{i-p} \right) e^{-t} = (-1)^i \left(\sum_{p=0}^i \frac{(-1)^p i! C_i^p}{(i-p)!} t^{i-p} \right) e^{-t}$

Donc $(-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!} e^t = \sum_{p=0}^i \frac{(-1)^p C_i^p}{(p-i)!} t^{i-p} = \sum_{p=0}^i \frac{(-1)^{i-p} C_i^{i-p}}{p!} t^p = \sum_{p=0}^i \frac{(-1)^{i-p} C_i^p}{p!} t^p = L_i(t)$.

18. Pour $j < i$, on a : $\psi(L_i, L_j) = \int_0^{+\infty} L_i(t) L_j(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} L_i(t) L_j(t) e^{-t} dt = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t) dt$

A l'aide d'une intégration par parties, on a $\int_0^X f_i^{(i)}(t) L_j(t) dt = \left[f_i^{(i-1)}(t) L_j(t) \right]_0^X - \int_0^X f_i^{(i-1)}(t) L_j'(t) dt$

D'autre part au voisinage de 0, on a $f_i(t) = o(t^{i-1})$, donc d'après Taylor-young, on a $f_i^{(p)}(0) = 0$, pour $p \leq i - 1$

Et on a en $+\infty$, $f_i^{(i-1)}(t) = o(t^{-j})$, donc $L_j(t) f_i^{(i-1)}(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$, par suite :

$\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t) dt = - \int_0^{+\infty} f_i^{(i-1)}(t) L_j'(t) dt$, puis des intégrations par parties successives, on a :

$\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t) dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} f_i^{(i-k)}(t) L_j^{(k)}(t) dt$, en particulier pour $k = j$, $L_j^{(j)}$ est constant, donc

$\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_j(t) dt = (-1)^j C_i \int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t) dt = \left[f_i^{(i-j+1)}(t) \right]_0^{+\infty} = 0$.

Pour $i = j$, le même travail donne $\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_i(t) dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} f_i(t) L_i^{(i)}(t) dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} f_i(t) L_i^{(i)}(t) dt$

D'autre part, on a $L_i(t) = \frac{t^i}{i!} + \dots$, donc $L_i^{(i)}(t) = 1$, ce qui donne que :

$\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_i(t) dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} f_i(t) dt = \frac{1}{i!} \int_0^{+\infty} t^i e^{-t} dt = i!$, donc

$\psi(L_i, L_j) = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t) L_i(t) dt = 1$.

19. Pour $P = X^k$, on a $\tau(P)(X) = (X-1)^k = \sum_{p=0}^k (-1)^{k-p} C_k^p X^p$

On a $\tau^{-1}(P)(X) = P(X+1) = \sum_{p=0}^k C_k^p X^p$

$$\text{Donc } U = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & C_n^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_n^n \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} C_0^0 & (-1)^1 C_1^0 & (-1)^2 C_2^0 & \cdots & (-1)^n C_n^0 \\ 0 & (-1)^0 C_1^1 & (-1)^1 C_2^1 & \cdots & (-1)^{n-1} C_n^1 \\ 0 & 0 & (-1)^0 C_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & (-1)^1 C_n^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^0 C_n^n \end{pmatrix}$$

On a $L_i(t) = \sum_{p=0}^i \frac{(-1)^{i-p} C_i^p}{p!} t^p = \sum_{p=0}^i (-1)^{i-p} C_i^p B_p(t)$, donc la matrice de passage de \mathcal{B} dans \mathcal{L} est égal à T .

On a $T = P_{\mathcal{B}, \mathcal{L}}$, donc $U = T^{-1}$.

$S = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$ et \mathcal{L} étant orthonormée, donc $\text{mat}_{\mathcal{L}}(\psi) = I_n$, ce qui donne que ${}^t T S T = I_n$

Donc $S = {}^t T^{-1} T^{-1} = {}^t U U$.

On a $\det(S) = (\det(U))^2 = 1$ et aussi $\det S' = 1$

20. $\tau : P(X) \mapsto P(X+1)$ et notons $d : P(X) \mapsto P(-X)$, la matrice d dans la base canonique est D ,

donc $(\tau d)(P(X)) = P(-1-X)$, donc $(d\tau)^2(P(X)) = P(X)$, donc $(UD)^2 = id$, ce qui s'écrit matriciellement

$(DU)^2 = I_{n+1}$, donc $DUDU = I_{n+1}$ par suite $U^{-1} = DUD$.

D'autre part $S^{-1} = U^{-1} ({}^t U)^{-1} = (DUD) {}^t (DUD) = DU (D {}^t D) UD = DU {}^t UD = D (U {}^t U) D^{-1}$
($D^{-1} = D = {}^t D$)

Donc S^{-1} est semblable à ${}^t U U$.

21. S^{-1} et $U {}^t U$ sont semblables, donc ont le même polynôme caractéristiques

$$\begin{aligned} \det(U {}^t U - X I_{n+1}) &= \det(S^{-1} - X I_{n+1}) = (-X)^{n+1} \det\left(I_{n+1} - \frac{1}{X} S^{-1}\right) = (-X)^{n+1} \det(S^{-1}) \det\left(S - \frac{1}{X} I_{n+1}\right) \\ &= (-X)^{n+1} \det(S^{-1}) \Phi_S\left(\frac{1}{X}\right) = (-X)^{n+1} \Phi_S\left(\frac{1}{X}\right) \quad (\text{puisque } \det(S^{-1}) = 1). \end{aligned}$$

Or $\det(U {}^t U - X I_{n+1}) = \det({}^t U U - X I_{n+1}) = \det(S - X I_{n+1}) = \Phi_S(X)$ donc

$$(-X)^{n+1} \Phi_S\left(\frac{1}{X}\right) = \Phi_S(X)$$

Ainsi Φ_S un polynôme réciproque

Si n est pair $\Phi_S \in \mathcal{D}$, sinon $\Phi_S \in \mathcal{P}$.