Corrigé Mines-ponts 2008. Filière MP Mathématiques II

(Par Lhachimi lahcen professeur en MP* à Marrakech)

1) On pose pour $r \in \mathbb{R}^+,\ F(r) = f(re_1)$.

On a f est de classe C^1 donc F l'est aussi et il existe $M > 0$, $f(x) = 0$ si $\|x\| > M$,

donc $F(r) = 0$ si $r > M$ d'où $F \in C^1_K(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, de plus pour $x \in \mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$

tel que $x = \|x\|u_\theta,$ on a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\|x\|u_\theta) = f(R_\theta(\|x\|e_1)) \\ &= f(\|x\|e_1) = F(\|x\|) \end{aligned}$$

2) L'application

$$g\ :\ (y,\varphi) \to (x_1 + (\cos\varphi)y_1 - (\sin\varphi)y_2, x_2 + (\sin\varphi)y_1 + (\cos\varphi)y_2)$$

est continue car ses coordonnées le sont, donc $T_{f,x} = f \circ g$ est continue comme composée d'application continues, de plus $\varphi \to \cos\varphi$ et $\varphi \to \sin\varphi$ sont 2π périodiques donc l'application $\varphi \to T_{f,x}(y,\varphi)$ l'est aussi.

3) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f,x}(Rot_\theta(y)) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + Rot_{\varphi+\theta}(y))d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\theta^{2\pi+\theta} f(x + Rot_\varphi(y))d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{f,x}(y,\varphi)d\varphi = \mathcal{T}_{f,x}(y) \end{aligned}$$

car l'application $\varphi \to T_{f,x}(y,\varphi)$ est 2π périodique.

Ainsi $\mathcal{T}_{f,x}$ est radiale.

4) Cas $x = 0$: On a pour $t \in \mathbb{R}$, $Rot_\varphi(pu_\theta + tv_\theta) = pu_{\theta+\varphi} + tv_{\theta+\varphi}$ donc si $p > 0,$ alors les paramètres de $D_{O,\varphi}$ sont (p,α) où α est l'unique élément de $[0,2\pi[$ tel que $\alpha - \theta - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\alpha = \theta + \varphi - 2\pi E(\frac{\theta+\varphi}{2\pi})$$

si $p = 0,$ les paramètres de $D_{O,\varphi}$ sont $(0,\alpha_0)$ où $\alpha_0 \in [0,\pi[$ et $\alpha_0 - (\theta+\varphi) \in \pi\mathbb{Z}$:

$$\alpha_0 = \theta + \varphi - \pi E(\frac{\theta+\varphi}{\pi})$$

Cas général :

On a $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u_{\alpha+\beta} = \cos(\alpha)u_\beta + \sin(\alpha)v_\beta,$ donc

$$u_\psi = \cos(\psi-\theta-\varphi)u_{\theta+\varphi} + \sin(\psi-\theta-\varphi)v_{\theta+\varphi}$$

par suite

$$\begin{aligned} x + Rot_\varphi(pu_\theta + tv_\theta) &= \|x\|u_\psi + pu_{\theta+\varphi} + tv_{\theta+\varphi} \\ &= (p + \|x\|\cos(\psi-\theta-\varphi))u_{\theta+\varphi} + (t + \|x\|\sin(\psi-\theta-\varphi))v_{\theta+\varphi} \\ &= p_1 u_{\theta+\varphi_1} + t_1 v_{\theta+\varphi_1} \end{aligned}$$

avec

$$p_1 = |p + \|x\|\cos(\psi-\theta-\varphi)|$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi \text{ et } t_1 = t + \|x\|\sin(\psi-\theta-\varphi), \text{ si } p + \|x\|\cos(\psi-\theta-\varphi) > 0 \\ \varphi_1 = \pi + \varphi \text{ et } t_1 = -t - \|x\|\sin(\psi-\theta-\varphi), \text{ si } p + \|x\|\cos(\psi-\theta-\varphi) \le 0 \end{cases}$$

comme t_1 décrit $\mathbb{R}$ lorsque $t \in \mathbb{R}$, on est ramené à $x = 0$ où (p_1, φ_1) joue le rôle de (p, φ).

5) Dérivabilité de V_i :

Soit l'application $g_i : (x_i, r) \to f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)r$.

On a $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ donc g_i et $\frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, R]$.

Comme $[0, R]$ est un segment alors les dominations locales sont vérifiées donc par théorème de dérivation on a V_i est de classe C^1 et

$$V_i'(x_i) = \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdr \text{ pour } i \in \{1, 2\}.$$

Dérivabilité de W_i :

Soit $h_i : (x_i, \theta) \to \int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdr.$

On a $(x_i, \theta, r) \to f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)r$ est continue sur $D \times [0, R]$, donc par théorème de continuité h_i est continue sur $D = \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$

D'autre part d'aprés la dérivabilité de V_i on a

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} : (x_i, \theta) \to \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdr$$

et comme $(x_i, \theta, r) \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + ru_\theta)$ est continue sur $D \times [0, R]$ alors par théorème de continuité on a $\frac{\partial h_i}{\partial x_i}$ est continue sur D, d'où par théorème de dérivation W_i est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$W_i'(x_i) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x_i, \theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdrd\theta$$

6) Soit D le disque fermé de centre x et de rayon r.

Soit $\varphi : \Delta = [0,R] \times [0,2\pi] \to D,\ (r,\theta) \mapsto x + ru_\theta$.

On a φ est de classe C^1 et a pour jacobien $J\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.

$\varphi_{|\mathring{\Delta}}$ est injective et son jacobien est non nul, donc c'est un C^1 difféomorphisme de $\mathring{\Delta}$ vers $\varphi(\mathring{\Delta})$, de plus on a $\varphi(\Delta) = D$, donc d'aprés la formule de changement de variable on a

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} &= \int\int_\Delta (\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x+ru_\theta) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(x+ru_\theta))|J\varphi(r,\theta)|drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R (\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x+ru_\theta) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(x+ru_\theta))rdrd\theta\end{aligned}$$

On oriente $S(x,R)$ dans le sens positif, par le paramétrage :

$$\theta \to y = x + Ru_\theta,\ (\theta \in [0,2\pi])$$

donc d'aprés Green Reimann on a

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x_1}(y) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(y)\ dy_1\ dy_2 &= \int_{S(x,R)} P(y)dy_1 + Q(y)dy_2 \\ &= \int_0^{2\pi} P(x+ru_\theta)(-R\sin\theta)d\theta + Q(x+ru_\theta)(R\cos\theta)d\theta\end{aligned}$$

d'où le résultat.

7) Soit $M > 0$ tel que $supp\, f \subset B(o,M)$ on a alors $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy_1dy_2 = \int\int_{B(o,M)} f(y)dy_1dy_2$

L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ z \to y = x + z$ est bijective de classe C^1 et $J\varphi = 1$ est non nul, de plus $\varphi(B(-x,M)) = B(o,M)$ donc la formule de changement de variable donne:

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy_1dy_2 &= \int\int_{B(o,M)} f(y)dy_1dy_2 \\ &= \int\int_{B(-x,M)} f(x+z)dz_1dz_2 \\ &= \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x+z)dz_1dz_2 \text{ car } f(x+z) = 0 \text{ si } \|x+z\| > M\end{aligned}$$

D'autre part, soit $m > R$ tel que $supp\, f \subset B(x,m)$ on a alors

$$\begin{aligned}\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x+z)dz_1dz_2 &= \int\int_{B(o,m)} f(x+z)dz_1dz_2 \\ &= \int\int_{B(o,R)} f(x+z)dz_1dz_2 + \int\int_U f(x+z)dz_1dz_2\end{aligned}$$

avec $U = \{z \in \mathbb{R}^2,\ R \le \|z\| \le m\}$, par changement de variable on a

$$\int\int_{u} f(x+z)dz_1dz_2 = \int_R^m \int_0^{2\pi} f(x+ru_\theta)rd\theta dr$$

or pour tout $r \in [R,m]$ on a :

$$\begin{aligned} r \geq R > \|x\| + A &\Rightarrow (x,r) \in Q_A \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x+ru_\theta)d\theta = 0. \end{aligned}$$

donc

$$\int\int_U f(x+z)dz_1dz_2 = 0$$

d'où

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x+z)dz_1dz_2 = \int\int_{B(o,R)} f(x+z)dz_1dz_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(x+ru_\theta)rd\theta dr$$

8) si $x \in \mathring{B}(o,R-A)$ alors $\|x\| < R-A$ donc $R > \|x\| + A$ puis $(x,R) \in Q_A$ et d'aprés 7)

$$W_i(x_i) = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy_1dy_2 \text{ est constante pour } i \in \{1,2\}.$$

donc

$$\forall x \in \mathring{B}(o,R-A),\ W_1'(x_1) = W_2'(x_2) = 0$$

donc d'aprés 5)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdrd\theta = 0 \text{ pour } i \in \{1,2\}.$$

En utilisant 6) successivement pour $(P,Q) = (f,0)$ puis $(P,Q) = (0,f)$ on déduit

$$\int_0^{2\pi} f(x+Ru_\theta)(-R\sin\theta)d\theta = 0 \text{ puis } \int_0^{2\pi} f(x+Ru_\theta)(R\cos\theta)d\theta = 0$$

finalement

$$\int_0^{2\pi} f(x+Ru_\theta)\sin\theta d\theta = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} f(x+Ru_\theta)\cos\theta d\theta = 0$$

9) Notons $f_i = y_i f$. On a $f \in C_K^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ donc $f_i \in C_K^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

(car si f est nulle en dehors d'une boule alors f_i l'est aussi) .

On a pour $(x,R) \in Q_A$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_1(x+Ru_\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi}(x_1 + R\cos\theta)f(x+Ru_\theta)d\theta \\ &= x_1\int_0^{2\pi} f(x+Ru_\theta)d\theta + R\int_0^{2\pi} f(x+Ru_\theta)\cos\theta d\theta \\ &= R\int_0^{2\pi} f(x+Ru_\theta)\cos\theta d\theta \text{ (car } f \text{ vérifie l'hypothèse du lemme)} \\ &= 0 \text{ (d'aprés 8).} \end{aligned}$$

On a de même

$$\int_0^{2\pi} f_2(x+Ru_\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(x_2+R\sin\theta)f(x+Ru_\theta)d\theta = 0$$

10) Montrons par récurrence sur n que $y_1^k y_2^l f$ vérifie les hypothèses du lemme.

On a f vérifie les hypothèses du lemme donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons la propriété pour n et soit $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k+l = n+1$, donc $(k-1,l) \in \mathbb{N}^2$ ou $(k,l-1) \in \mathbb{N}^2$ et $k+l-1 = n$ donc $y_1^{k-1}y_2^l f$ ou $y_1^k y_2^{l-1} f$ vérifie les hypothèses du lemme donc d'aprés 9) $y_1^k y_2^l f$ les vérifie aussi.

Ainsi $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (x,R) \in Q_A$,

$$\int_{S(x,R)} y_1^k y_2^l f(y)\, d\theta = \int_0^{2\pi}(x_1+R\cos\theta)^k(x_2+R\sin\theta)^l f(x+Ru_\theta)d\theta = 0$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^k\theta\sin^l\theta\, f(x+Ru_\theta)d\theta &= \frac{1}{R^{k+l}}\int_{S(x,R)}(y_1-x_1)^k(y_2-x_2)^l f(y)\, d\theta\\ &= \frac{1}{R^{k+l}}\sum_{0\le i\le k, 0\le j\le l} C_k^i C_l^j(-x_1)^{k-i}(-x_2)^{l-j}\int_{S(x,R)} y_1^i y_2^j f(y)\, d\theta = 0\end{aligned}$$

11) On a pour $(x,R) \in Q_A$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}f(x+Ru_\theta)d\theta &= \sum_{0\le k\le n} C_n^k\, i^{n-k}\int_0^{2\pi}\cos^k\theta\sin^{n-k}\theta\, f(x+Ru_\theta)d\theta\\ &= 0 \text{ (d'aprés 10).}\end{aligned}$$

et comme f arrive dans $\mathbb{R}$, alors $\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)f(x+Ru_\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\sin(n\theta)f(x+Ru_\theta)d\theta = 0$

12) Soit $(x,R) \in Q_A$, on a l'application $\theta \to f(x+Ru_\theta)$ est continue 2π périodique et d'aprés 11) ses coefficients de Fourier sont nuls donc d'aprés Parseval $\int_0^{2\pi} f^2(x+Ru_\theta)d\theta = 0$.

13) Soit $(x,R) \in Q_A$, on a $\theta \to f^2(x+Ru_\theta)$ est continue positive et $\int_0^{2\pi} f^2(x+Ru_\theta)d\theta = 0$, donc $\forall\theta \in [0,2\pi]$, $f(x+Ru_\theta) = 0$.

Soit maintenant f vérifiant les hypothèses du lemme et $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|y\| > A$, on peut écrire

$$y = Ru_\theta \text{ avec } R \ge 0 \text{ et } \theta \in [0,2\pi]$$

En prenant $x = 0$ on a $R = \|y\| > A = A + \|x\|$ donc $(x,R) \in Q_A$ par suite

$f(y) = f(x+Ru_\theta) = 0,$ ainsi f est nulle sur le complémentaire de $B(0,A)$.

14) D'abord on a f continue à support compact donne $t \to f(pu_\theta + tv_\theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f}(\theta,p)$ est bien définie.

$\hat{f}(\theta,p) = \int_{\mathbb{R}} f(pu_\theta + tv_\theta)dt = \int_{\mathbb{R}} F(\sqrt{p^2+t^2})dt = 2\int_0^{+\infty} F(\sqrt{p^2+t^2})dt$ est indépendant de θ donc $\hat{f}(\theta,p) = \hat{f}(0,p)$.

15) D'aprés 14) on a

$$\hat{f}(0,\sqrt{v}) = 2\int_0^{+\infty} F(\sqrt{v+t^2})dt$$

en faisant le changement de variable $u = v+t^2$ on obtient

$$\hat{f}(0,\sqrt{v}) = 2\int_v^{+\infty} F(\sqrt{u})\frac{du}{2\sqrt{u-v}} = \int_v^{+\infty} F(\sqrt{u})\,(u-v)^{-\frac{1}{2}}du$$

16) Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tel que $h(u) = F(\sqrt{u})$. On a h continue car F l'est, et il existe $m > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $\|x\| > m$, donc h est nulle en dehors du segment $[0,\sqrt{m}]$, donc $Lh : x \to \int_x^{+\infty} \frac{h(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ est continue nulle en dehors de $[0,\sqrt{m}]$, $L(Lh)$ est dérivable et $(L(Lh))' = -\pi h$. D'autre part

$$\begin{aligned} Lh(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{F(\sqrt{t})}{\sqrt{t-x}}\,dt \\ &= \hat{f}(0,\sqrt{x}) \text{ (d'aprés 15)} \\ &= 0 \text{ si } x > A^2 \text{ (Par hypothèse du théorème)} \end{aligned}$$

donc $(L(Lh))(x) = \int_x^{+\infty} \frac{Lh(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ est nulle si $x > A^2$, par suite

$$\forall x > A^2,\ 0 = (L(Lh))'(x) = -\pi h(x)$$

d'où F est nulle sur $]A,+\infty[$, ainsi $f(x) = 0$ si $\|x\| > A$.

17) • Avant de parler de $\hat{\mathcal{T}}_{f,x}(\theta,p)$ vérifions que, $\underline{\mathcal{T}_{f,x} \in C^1_K(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$:

L'application

$$T_{f,x} : (y,\varphi) \to f(x+Rot_\varphi(y))$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \times [0,2\pi]$, d'autre part f étant de classe C^1, on a $\frac{\partial T_{f,x}}{\partial y_i}$ existent et continues sur $\mathbb{R}^2 \times [0,2\pi]$, donc par théorème de dérivation sous l'intégrale on a $\mathcal{T}_{f,x}$ admet des dérivées partielles qui sont continues par théorème de continuité, d'où $\mathcal{T}_{f,x}$ est de classe C^1.

Il existe $M > 0$ tel que f nulle en dehors de $B(o,M)$.

Si $\|y\| > M + \|x\|$ alors $\|x + Rot_\varphi(y)\| \geq \|y\| - \|x\| > M$ puis

$T_{f,x}(y,\varphi) = f(x + Rot_\varphi(y))$ est nulle si y en dehors de $B(o,M + \|x\|)$, par suite $\mathcal{T}_{f,x}$ l'est aussi.

• On a $\|pu_\theta + tv_\theta\| \geq |t| - p$, donc pour $|t| > m = M + \|x\| + p$, on a $\mathcal{T}_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta) = 0$ d'où

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{T}}_{f,x}(\theta,p) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta)dt \\
&= \int_{-m}^{m} \mathcal{T}_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-m}^{m}\int_0^{2\pi} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)d\varphi\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-m}^{m} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)d\varphi\, dt \text{ (d'aprés Fubini)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)dt\, d\varphi
\end{aligned}$$

18) Soit $\theta \in [0,2\pi[$ et $p > A + \|x\|$ on a $T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi) = f(x + Rot_\varphi(pu_\theta + tv_\theta))$

or d'aprés 4)

$$x + Rot_\varphi(pu_\theta + tv_\theta) = p_1 u_{\theta+\varphi} + t_1 v_{\theta+\varphi}$$

avec

$$\begin{aligned}
p_1 &= p + \|x\|\cos(\psi - \theta - \varphi) \geq p - \|x\| > A > 0 \\
t_1 &= t + \|x\|\sin(\psi - \theta - \varphi)
\end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{T}}_{f,x}(\theta,p) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)dt\, d\varphi \text{ (d'aprés 17)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(p_1 u_{\theta+\varphi} + t_1 v_{\theta+\varphi})dt\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(p_1 u_{\theta+\varphi} + t v_{\theta+\varphi})dt\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(\theta + \varphi, p_1)d\varphi = 0 \text{ car } p_1 > A
\end{aligned}$$

19) $\{x + Rot_\varphi(y), \varphi \in [0,2\pi]\}$ est le cercle de centre x et de rayon $R = \|y\|$.

La condition $\|y\| > A + \|x\|$ signifie que $(x,R) \in Q_A$ voir figure 2 de l'énoncé.

20) Comme d'aprés 3) $\mathcal{T}_{f,x}$ est radiale et d'aprés 18) $\hat{\mathcal{T}}_{f,x}(\theta,p) = 0$ pour $p > A + \|x\|$ alors

d'aprés 16) $\mathcal{T}_{f,x}(y) = 0$ pour $\|y\| > A + \|x\|$ càd $\int_0^{2\pi} f(x + Rot_\varphi(y))d\varphi = 0$ si $\|y\| > A + \|x\|$.

En choisissant $y = R\, e_1$ on obtient pour tout $R > A + \|x\|$, $\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\varphi)d\varphi = 0$, donc

d'aprés le lemme1 on a $f(x) = 0$ pour $\|x\| > A$.