1. $*$ Soit $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$. Alors
$$M^t = M = -M$$
si bien que $M = 0$, et donc $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$ et ces deux sous-espaces sont en somme directe.

$*$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a immédiatement
$$M = \frac{M + M^t}{2} + \frac{M - M^t}{2}.$$
En posant $S = \dfrac{M + M^t}{2}$, il vient par linéarité et involutivité de la transposition
$$S^t = \left(\frac{M + M^t}{2}\right)^t = \frac{M^t + M}{2} = S$$
si bien que $S \in \mathcal{S}_n$. On obtient de même que $\dfrac{M - M^t}{2} \in \mathcal{A}_n$ et donc que $M \in \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$. Il en résulte que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$, d'où finalement
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n.$$

2. Soient $M = (m_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n}}$ les coefficients de M. On sait que $E_{(k,\ell)}E_{(i,j)} = \delta_{\ell,i}E_{(k,j)}$ pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. Il vient
$$ME_{(i,j)} = \sum_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2} m_{k,\ell}E_{(k,\ell)}E_{(i,j)} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}E_{(k,j)}$$
d'où
$$\mathrm{Tr}(ME_{(i,j)}) = m_{j,i}.$$

3. En notant toujours $(m_{i,j})$ les coefficients de M, on a en particulier pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, $E_{(i,j)} - E_{(j,i)} \in \mathcal{A}_n$ et donc
$$\mathrm{Tr}(M(E_{(i,j)} - E_{(j,i)})) = m_{j,i} - m_{i,j} = 0.$$
On en déduit que $M \in \mathcal{S}_n$.

4. La transposition étant une application linéaire donc continue sur l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie, on a pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$(\mathrm{e}^M)^t = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M^p}{p!}\right)^t = \left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{p=0}^{N} \frac{M^p}{p!}\right)^t = \lim_{N \to +\infty} \sum_{p=0}^{N} \frac{(M^t)^p}{p!} = \mathrm{e}^{M^t}.$$
En particulier, si $T \in \mathcal{A}_n$, on a, puisque T et $-T$ commutent
$$\mathrm{e}^T(\mathrm{e}^T)^t = \mathrm{e}^T\mathrm{e}^{T^t} = \mathrm{e}^T\mathrm{e}^{-T} = \mathrm{e}^{T-T} = I$$
si bien que e^T est orthogonale.

5. On a pour tous $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $s \in \mathbb{R}$ en utilisant la sous-multiplicativité de la norme
$$\|\mathrm{e}^{sM} - I - sM\| = \left\|\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(sM)^p}{p!}\right\| \leq s^2\|M\|^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(s\|M\|)^p}{(p+2)!} \leq s^2\|M\|^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(s\|M\|)^p}{p!} = s^2\|M\|^2\mathrm{e}^{s\|M\|}.$$
Comme $s \mapsto \|M\|^2\mathrm{e}^{s\|M\|}$ est continue au voisinage de 0, elle est bornée, si bien que
$$\mathrm{e}^{sM} - I - sM = O(s^2).$$

6. On a en notant $(m_{i,j})$ les coefficients de M
$$\det(M - XI) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (m_{i,\sigma(i)} - X\delta_{i,\sigma(i)})$$
si bien que par développement de cette quantité, les coefficients $\alpha_j(M)$ apparaissent comme des quantités polynomiales en les $(m_{i,j})$, donc des fonctions continues des coefficients de M.

Il en résulte que $M \mapsto \alpha_j(M)$ est continue pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

7. Pour tout $s \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\det(I+sM) &= s^n \det(s^{-1}I+M) = s^n \chi_M(-s^{-1}) = s^n \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(M)(-s)^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(M)(-1)^j s^{n-j} = (-1)^n \alpha_n(M) + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}(M)s + s^2 P(s)\end{aligned}$$

où P est un polynôme en s, donc borné au voisinage de 0. Comme on sait que $\alpha_n(M) = (-1)^n$ et $\alpha_{n-1}(M) = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(M)$, il vient bien

$$\det(I+sM) = 1 + s\operatorname{Tr}(M) + O(s^2).$$

En notant $s \mapsto N(s)$ une fonction bornée au vosinage de 0 à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a avec le résultat précédent

$$\begin{aligned}\det(I+sM+s^2N(s)) &= \det(I+s(M+sN(s))) = 1 + s\operatorname{Tr}(M+sN(s)) + O(s^2) = 1 + s\operatorname{Tr}(M) + s^2\operatorname{Tr}(N(s)) + O(s^2) \\ &= 1 + s\operatorname{Tr}(M) + O(s^2)\end{aligned}$$

car la trace étant continue car linéaire sur un espace de dimension finie, $s \mapsto \operatorname{Tr}(N(s))$ est bornée au voisinage de 0. Il en résulte bien que

$$\det(I+sM+O(s^2)) = 1 + s\operatorname{Tr}(M) + O(s^2).$$

8. Soit $r < n$ le rang de M : il existe $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{R})^2$ telles que $M = PJ_rQ$ où J_r est la matrice par blocs $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. On pose alors

$$N_0 = P\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)Q$$

si bien que pour tout $s > 0$

$$\det(M+sN_0) = \det\left(P\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & sI_{n-r} \end{array}\right)Q\right) = \det(P)\det(Q)s^{n-r} \neq 0.$$

Si $\det(P)\det(Q) > 0$, on a bien $\det(M+sN_0) > 0$. Dans le cas contraire, on remplace l'un des « 1 » de la diagonale de N_0 par un -1 et on conclut de même.

9. On a déjà construit N_0 à coefficients réels ci-dessus. Si M est nulle, il suffit de prendre $N_0 = I$. On suppose dans la suite que M est de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$.

Si M est diagonalisable, en notant $r < n$ son rang, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$, avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ non nuls (ce sont les valeurs propres non nulles de M comptées avec leur multiplicité). Si le produit $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ est strictement positif, on pose $N_0 = P\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)P^{-1}$ et pour tout $s > 0$

$$\det(M+sN_0) = \det\operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, s, \ldots, s) = s^{n-r}\prod_{k=1}^{r}\lambda_k > 0.$$

Sinon, on remplace de même l'un des « 1 » de la diagonale de N_0 par un -1 et on procède de même.

Si M est symétrique, il existe cette fois $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1} = PDP^t$ avec les mêmes notations que ci-dessus, et le même raisonnement permet d'aboutir en notant que N_0 construite comme ci-dessus est alors symétrique car ortho-diagonalisable.

10. Raisonnons en terme d'endomorphisme : soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E qui commutent. En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par v d'après le cours. Si E' est un tel sous-espace propre, l'endomorphisme $\tilde{v}$ induit par v sur E' est autoadjoint donc il existe une base orthonormale de E' dans laquelle la matrice de $\tilde{v}$ est diagonale. En réunissant des bases ainsi construites de tous les sous-espaces propres de u, on obtient une base (en l'occurrence orthonormale puisque les sous-espaces propres de u sont deux-à-deux orthogonaux) de vecteurs propres commune à u et à v.

La traduction matricielle de ce résultat est que si A et B réelles symétriques commutent, il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n$ telle que $D = P^{-1}AP$ et $D' = P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales. Si P est choisie de telle sorte que $D = \operatorname{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$, alors D' est également diagonale, avec les valeurs propres de B sur la diagonales, rangées dans un certain ordre.

On peut donc trouver une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $D' = \mathrm{Diag}(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})$. Il en résulte que

$$\det(A+B) = \det(P(D+D')P^{-1}) = \det(\mathrm{Diag}(a_1 + b_{\sigma(1)}, \ldots, a_n + b_{\sigma(n)})) = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})$$

ce qu'on voulait.

11. $*$ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f : M \mapsto M^t M$. f est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car la transposition et le produit matriciel le sont. Comme $\{I\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{O}_n = f^{-1}(\{I\})$, on en déduit que $\mathcal{O}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$*$ De plus, pour tout $M \in \mathcal{O}_n$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a en assimilant $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\|MX\| = \|X\|$$

si bien que $\|M\| = 1$. Il en résulte que $\mathcal{O}_n$ est inclus dans la sphère unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|$, et est donc une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, le fermé borné $\mathcal{O}_n$ est donc compact.

12. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixé, l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f : U \mapsto UMU^t$ est continue par continuité du produit matriciel et de la transposition. Or, par définition

$$\mathcal{O}_n(M) = f(\mathcal{O}_n)$$

si bien que $\mathcal{O}_n(M)$ est compact commme image continue d'un compact.

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ fixées, l'application $g : C \mapsto \det(A + C)$ est elle aussi continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ car polynomiale en les coefficients de C. Elle est donc bornée sur le compact $\mathcal{O}_n(B)$ et sa borne supérieure est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $B_0 \in \mathcal{O}_n(B)$ telle que

$$\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A + C)$$

ce que l'on souhaitait.

13. D'après (5), on a

$$\mathrm{e}^{sT} B_0 \mathrm{e}^{-sT} = (I + sT + O(s^2))B_0(I - sT + O(s^2)) = B_0 + s(TB_0 - B_0T) + O(s^2).$$

Il vient

$$\det(A + \mathrm{e}^{sT} B_0 \mathrm{e}^{-sT}) = \det(A + B_0 + s(TB_0 - B_0T) + O(s^2)) = \det(A + B_0)\det(I + s(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1} + O(s^2))$$

puis par (7)

$$\begin{aligned}\det(A + \mathrm{e}^{sT} B_0 \mathrm{e}^{-sT}) &= \det(A + B_0)\Big(1 + s\,\mathrm{Tr}[(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1}] + O(s^2)\Big) \\ &= \det(A + B_0)\Big(1 + s\,\mathrm{Tr}((TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1})\Big) + O(s^2)\end{aligned}$$

ce qui était requis.

14. D'après (4), pour $T \in \mathcal{A}_n$, e^{sT} et e^{-sT} sont orthogonales, et donc $\mathrm{e}^{sT} B_0 \mathrm{e}^{-sT}$ aussi puisque B_0 l'est et que $\mathcal{O}_n$ est un groupe multiplicatif. D'après (12), on a donc

$$\psi_T(s) = \det(A + \mathrm{e}^{sT} B_0 \mathrm{e}^{-sT}) \leq \det(A + B_0) = \psi_T(0)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

15. L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de ψ_T en 0, prouvé en (13), montre que ψ_T est dérivable en 0 et que

$$\psi_T'(0) = \det(A + B_0)\,\mathrm{Tr}((TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1}).$$

Comme ψ_T atteint un maximum global en 0, on doit avoir $\psi_T'(0) = 0$ d'où $\det(A+B_0)\,\mathrm{Tr}((TB_0 - B_0T)(A+B_0)^{-1})$ et donc, compte tenu du fait que $\det(A + B_0) \neq 0$ et des propriétés de la trace

$$\mathrm{Tr}(TB_0(A + B_0)^{-1}) = \mathrm{Tr}(B_0T(A + B_0)^{-1}) = \mathrm{Tr}(T(A + B_0)^{-1}B_0).$$

16. On a montré que

$$\mathrm{Tr}(T[B_0(A + B_0)^{-1} - (A + B_0)^{-1}B_0]) = 0$$

pour tout $T \in \mathcal{A}_n$. D'après (3), il vient que $S = B_0(A+B_0)^{-1} - (A+B_0)^{-1}B_0$ est symétrique.

Or, $B_0 \in \mathcal{O}_n(B)$: il existe $U \in \mathcal{O}_n$ telle que $B_0 = UBU^{-1} = UBU^t$ d'où il ressort que $B_0^t = UB^tU^t = UBU^t = B_0$. B_0 est donc symétrique. Il en va ainsi de même de $A + B_0$, puis de $(A+B_0)^{-1}$. On en déduit que

$$S^t = [B_0(A+B_0)^{-1} - (A+B_0)^{-1}B_0]^t = -(A+B_0)^{-1}B_0 + B_0(A+B_0)^{-1} = -S$$

et S est donc également antisymétrique. Ceci prouve que $S = 0$ et donc que B_0 commute avec $(A+B_0)^{-1}$.

En multipliant la relation $B_0(A+B_0)^{-1} = (A+B_0)^{-1}B_0$ par $(A+B_0)$ à gauche et à droite, il vient que B_0 commute avec $A + B_0$, et donc finalement que B_0 commute avec A.

17. Comme $B = IBI^{-1}$, on a $B \in \mathcal{O}_n(B)$ et d'après (12)

$$\det(A+B) \leq \det(A+B_0).$$

D'autre part, il existe $U \in \mathcal{O}_n$ telle que $B_0 = UBU^{-1}$ si bien B_0 et B sont semblables et ont donc les mêmes valeurs propres $(b_1, \ldots, b_n)$. Comme A et B_0 commutent et que B_0 est symétrique (on l'a vu ci-dessus), on a alors par (10) l'existence de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\det(A+B_0) = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}).$$

Il vient bien ainsi

$$\det(A+B) \leq \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}).$$

18. On considère la matrice N_0 symétrique construite à la question (9) associée à la matrice $M = A + B_0$, et on pose $N_k = B_0 + 2^{-k}N_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère $B_k \in \mathcal{O}_n(N_k)$ réalisant le maximum sur $\mathcal{O}_n(N_k)$ de la fonction $C \mapsto \det(A+C)$, comme en (12).

(i) Il est clair que N_k converge vers B_0 quand k tend vers l'infini.

(ii) On a $B_k \in \mathcal{O}_n(N_k)$ par définition-même...

(iii) ... et $\det(A+N_k) \leq \det(A+B_k)$ pour la même raison.

(iv) Enfin, comme $2^{-k} > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\det(A+N_k) > 0$ par (9). On a donc $\det(A+B_k) \geq \det(A+N_k) > 0$, donc $A + B_k$ est inversible, si bien que B_k commute avec A comme en (16).

19. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $U_k \in \mathcal{O}_n$ telle que $B_k = U_kN_kU_k^{-1}$. Comme $\mathcal{O}_n$ est compact, on peut extraire de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(U_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $U \in \mathcal{O}_n$. On a alors $B_{\phi(k)}$ convergente et

$$B' = \lim_{k\to+\infty} B_{\phi(k)} = UB_0U^{-1}.$$

B' est semblable à B_0 donc à B, et a donc les mêmes valeurs propres $(b_1, \ldots, b_n)$ que B. Par continuité du déterminant, il vient par passage à la limite dans $\det(A+N_{\phi(k)}) \leq \det(A+B_{\phi(k)})$

$$\det(A+B_0) \leq \det(A+B').$$

De plus, A et B_k commutent pour tout $k \in \mathbb{N}$, si bien que par passage à la limite dans $AB_{\phi(k)} = B_{\phi(k)}A$, on obtient $AB' = B'A$. Il résulte alors de (10) qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\det(A+B') = \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}).$$

Comme $\det(A+B) \leq \det(A+B_0)$, on a en regroupant tous ces résultats que

$$\det(A+B) \leq \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} (a_k + b_{\sigma(k)})$$

ce qui est l'inégalité (1).

20. Raisonnons par récurrence. La propriété $\pi(1)$ est triviale. Dans le cas $n = 2$, si l'on a $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant (H), il n'y a que deux permutations à envisager : $\sigma = \mathrm{Id}$, et $\sigma = (1\ 2)$. Or, on a

$$(a_1+b_2)(a_2+b_1) - (a_1+b_1)(a_2+b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 = (a_2-a_1)(b_2-b_1) \geq 0$$

ce qui montre que le maximum de $P(\sigma)$ est atteint pour $\sigma = (1\ 2)$ et prouve $\pi(2)$.

On suppose maintenant $\pi(n-1)$ vérifiée pour $n \geq 3$ fixé, et on considère deux suites $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ vérifiant (H) et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On procède alors à la distinction de cas suggérée par l'énoncé.

$*$ Si $\sigma(n) = 1$, alors σ réalise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $[\![2, n]\!]$. On pose pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ $\tau(i) = \sigma(i) - 1$, τ étant ainsi un élément de $\mathfrak{S}_{n-1}$. Il vient

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) = (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_{\sigma(k)}) = (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_{\tau(k)+1}).$$

En posant $b'_i = b_{i+1}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, il est clair que $(a_k)_{1\leq k\leq n-1}$ et $(b'_k)_{1\leq k\leq n-1}$ vérifient encore (H) et l'on obtient avec l'hypothèse de récurrence

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) = (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b'_{\tau(k)}) \leq (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b'_{n-1-k+1}) = (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_{n-k+1}) = \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1}).$$

$*$ Si $\sigma(n) = j > 1$, on note $i = \sigma^{-1}(1) < n$. On a alors

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) = (a_i + b_1)(a_n + b_j)\prod_{k=2}^{n-1}(a_k + b_{\sigma(k)}).$$

Or, en utilisant $\pi(2)$, on a

$$(a_i + b_1)(a_n + b_j) \leq (a_i + b_j)(a_n + b_1).$$

On pose alors $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ définie par $\sigma'(n) = 1$, $\sigma'(i) = j$, $\sigma'(k) = \sigma(k)$ si $k \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{i\}$. On a alors

$$P(\sigma) \leq (a_i + b_j)(a_n + b_1)\prod_{k=2}^{n-1}(a_k + b_{\sigma(k)}) = P(\sigma').$$

σ' vérifie les hypothèses du premier cas, et $P(\sigma')$ est ainsi majoré par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1})$, donc $P(\sigma)$ également.

Nous avons ainsi prouvé que $\pi(n-1) \Rightarrow \pi(n)$, et achevé ainsi notre raisonnement par récurrence.

Finalement, $\pi(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.