MINES-PONTS 2003. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

1. $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}\,y}{y+x+1} = \Big[\ln|y+x+1|\Big]_{y=0}^{y=n} = \ln(x+n+1) - \ln(x+1)$ pour $x \geqslant 0$.

Donc $I_n = \Big[(x+n+1)\ln(x+n+1) - (x+n+1)\Big]_{x=0}^{x=n} - \Big[(x+1)\ln(x+1) - (x+1)\Big]_{x=0}^{x=n}$

Il en résulte finalement que $\boxed{I_n = (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1)}$ □

2. Il vient $\ln(2n+1) = \ln(2n) + \ln(1+\dfrac{1}{2n}) = \ln n + \ln 2 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$

$$\begin{aligned}\text{Donc } (2n+1)\ln(2n+1) &= (2n+1)\ln n + (2n+1)\ln 2 + 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})\\ &= 2n\ln n + (2\ln 2)n + \ln n + (1+\ln 2) + \frac{1}{4n} + O(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

De même $\ln(n+1) = \ln n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$

Donc $2(n+1)\ln(n+1) = 2n\ln n + 2\ln n + 2 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n} + O(\dfrac{1}{n^2}) = 2n\ln n + 2\ln n + 2 + \dfrac{1}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$

Et finalement $\boxed{I_n = (2\ln 2)n - \ln n + \ln 2 - 1 - \dfrac{3}{4n} + O(\dfrac{1}{n^2})}$ □

3. La fonction $f\ :\ (x,y) \longmapsto \dfrac{1}{x+y+1}$ étant continue sur $[0,n]^2$, il vient que $I_n = \displaystyle\iint_{[0,n]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

Notons $Q_{i,j} = [i,i+1]\times[j,j+1]$. Par additivité de l'intégrale double, il vient que $I_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\iint_{Q_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

Par positivité de l'intégrale double, il vient que $f(i+1,j+1) \leqslant \displaystyle\iint_{Q_{i,j}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \leqslant f(i,j)$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(i+1,j+1) \leqslant I_n \leqslant S_n \quad (1)$

Or $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(i+1,j+1) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(i,j) = S_n - \Big(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+1} - 1\Big) = S_n - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + 1$

Par ailleurs classiquement $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = 1 + \ln n$ de sorte que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(i+1,j+1) \geqslant S_n - 2\ln n - 1$.

Il découle alors de (1) que $\boxed{I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + 2\ln n + 1}$ □

4. Le principe des gendarmes prouve alors que $\boxed{S_n \sim (2\ln 2)n}$ □

5. En notant que $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} x^j\Big) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x^{i+j}$, il vient que $\boxed{J_n = S_n \sim (2\ln 2)n}$ □

6. Il est clair que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de E_n alors elle est 1-p.o.
Réciproquement soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille 1-p.o. de E_n. Les vecteurs étant unitaires, pour prouver que la famille est une base orthonormée, il suffit de prouver que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Soit alors $i \neq j$. Par hypothèse on a en particulier $||x_i + x_j||^2 = 2$. Par ailleurs $||x_i + x_j||^2 = ||x_i||^2 + ||x_j||^2 + 2(x_i|x_j) = 2 + 2(x_i|x_j)$. Donc $(x_i|x_j) = 0$. Ainsi :

$\boxed{\text{Une famille de } n \text{ vecteurs de } E_n \text{ est une base orthonormée si et seulement si elle est 1-p.o.}}$ □

7. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille μ-p.o. d'un espace préhilbertien réel et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une famille de réels telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Il vient en particulier que $\displaystyle\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant 0$ donc $\lambda_i = 0$ pour tout i puisque $\mu > 0$. Donc la famille est libre.
Une famille quelconque étant libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre, il en résulte :

$\boxed{\text{Une famille } \mu\text{-p.o. d'une espace préhilbertien réel est libre.}}$ □

8. Supposons qu'il existe $\mu \geqslant 1$ tel que la famille $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ soit μ-p.o.
Envisageons le polynôme $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Il vient que $||Q_n||^2 = J_n$. Donc $||Q_n||^2 \sim (2\ln 2)n$ d'après la question 5.
Par ailleurs $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k$ avec $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$.
Comme la famille $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est μ-p.o., il vient que $||Q_n||^2 \leqslant \mu \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2k+1}$ et cela pour tout entier n.
Ainsi $||Q_n||^2 / \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2k+1} \leqslant \mu$ pour tout entier n. (1)
Or par principe de sommation des équivalents pour les séries à termes positifs divergentes, il vient que :
$\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2k+1} \sim \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k} \sim \dfrac{1}{2}\ln n$.
Donc $||Q_n||^2 / \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2k+1} \sim 4\ln 2 \dfrac{n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Contradiction avec (1). Donc :

$\boxed{\text{La famille } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est libre et unitaire mais n'est pas presque orthogonale.}}$ □

9. La matrice M est évidemment symétrique. En outre elle est définie positive puisqu'égale à la matrice du produit scalaire de E_n dans la base $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$. Il en découle qu'elle est orthodiagonaisable en une matrice D dont tous les éléments sont strictement positifs. Donc :

$\boxed{\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad \exists D \text{diagonale à éléments diagonaux strictement positifs} \quad \text{t.q.} \quad M = {}^tPDP}$ □

10 Il vient $||W||^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i V_i \mid \sum_{j=1}^{n} a_j V_j \Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j (V_i|V_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} a_i a_j$. Donc $\boxed{||W||^2 = {}^tAMA}$ □

11 La relation ci-dessus redémontre que la matrice M est définie positive (et est égale à la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{V}$) donc que ses valeurs propres (c'est à dire les éléments diagonaux de D) sont strictement positives.
Des deux questions précédentes on tire que $||W||^2 = {}^tBDB$ avec $B = PA$. (1)
Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ le spectre de M en supposant $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.
De (1) ci-dessus on en déduit $\boxed{\lambda_1 ||B||^2 \leqslant ||W||^2 \leqslant \lambda_n ||B||^2}$ □

12 Comme P est orthogonale, on a $||B||^2 = ||PA||^2 = ||A||^2$ et la relation ci-dessus s'écrit donc :
$\lambda_1 ||A||^2 \leqslant ||W||^2 \leqslant \lambda_n ||A||^2$. Ce qui prouve que :

$\boxed{\text{La base } (V_1, V_2, \ldots, V_n) \text{ de vecteurs unitaires est } \mu\text{-p.o. dès lors que } \mu \geqslant \max(\lambda_n, \dfrac{1}{\lambda_1})}$ □

13 On commence par remarquer qu'une suite $(V_m)_{m\geqslant 1}$ de E est μ-p.o. si et seulement si pour tout entier n la famille $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est μ-p.o.
Soient alors une suite $(V_m)_{m\geqslant 1}$ vérifiant la condition de l'énoncé, n un entier fixé quelconque, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une famille de réels quelconque et $W = \sum_{i=1}^{n} a_i V_i$. En notant $m_{i,j} = (V_i\, |V_j)$ et $||A||^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, il vient :
$||W||^2 = ||A||^2 + 2 \sum_{i<j} m_{i,j} a_i a_j$ donc :
$||A||^2 - 2 \sum_{i<j} |m_{i,j}|.|a_i||a_j| \leqslant ||W||^2 \leqslant ||A||^2 + 2 \sum_{i<j} |m_{i,j}|.|a_i||a_j|$ (1)
Or $\sum_{i<j} |m_{i,j}|.|a_i||a_j| \leqslant \sum_{i<j} \big(\dfrac{1}{\alpha}\big)^{j-i} |a_i||a_j| = \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\big(\dfrac{1}{\alpha}\big)^k \sum_{i=1}^{n-k} |a_i||a_{i+k}| \Big)$
En outre par l'inégalité de Schwarz : $\sum_{i=1}^{n-k} |a_i||a_{i+k}| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} a_{i+k}^2} \leqslant ||A||^2$
Donc $\sum_{i<j} |m_{i,j}|.|a_i||a_j| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \big(\dfrac{1}{\alpha}\big)^k \times ||A||^2 \leqslant \dfrac{1}{\alpha - 1} ||A||^2$
De (1) il résulte alors que $\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}||A||^2 \leqslant ||W||^2 \leqslant \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}||A||^2$ et cela pour tout entier n.
Comme $\alpha > 3$, il en résulte bien que la famille $(V_m)_{m\geqslant 1}$ est μ-p.o. avec $\mu = \max\Big(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}, \dfrac{\alpha-1}{\alpha-3}\Big)$.

$\boxed{\text{Une famille } (V_m)_{m\geqslant 1} \text{ d'un espace préhilbertien vérifiant la condition de l'énoncé est p.o.}}$ □

14 • $x \longmapsto f(x,1) = \sqrt{3}\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+2}$ de dérivée $-\sqrt{3}\dfrac{x-1}{(x+2)^2\sqrt{2x+1}} < 0$ pour $x > 1$ établit un homéomorphisme décroissant de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$.

• $y \longmapsto f(1,y) \equiv 1$

• $G : x \longmapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ de dérivée $-\dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x}} < 0$ pour $x > 1$ établit également un homéomorphisme décroissant de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$.

• $y \longmapsto \lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y) \equiv 0$.

• $x \longmapsto f(x,y)$ de dérivée $-y^2\sqrt{2y+1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2yx+1}} < 0$ pour $x > 1$ réalise encore un homéomorphisme décroissant de $[1,+\infty[$ sur $]0,1]$

• $y \longmapsto f(x,y)$ de dérivée $-(x-1)^2\dfrac{y}{\big((x+1)y+1\big)^2\sqrt{4xy^2+2(x+1)y+1}} < 0$ établit un homéomorphisme décroissant de $[1,+\infty[$ sur $\left]\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}, \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{2x+1}}{x+2}\right]$

15 La fonction $x \longmapsto f(x,y)$ réalise pour tout $y \geqslant 1$ un homéomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$, donc :

$\boxed{\text{Pour tout } \gamma \in]0,1[\text{ et tout } y \geqslant 1, \text{ il existe un unique } x = \varphi_\gamma(y) > 1 \text{ tel que } f\big(\varphi_\gamma(y), y\big) = \gamma}$ $\square$

Comme G réalise également un homéomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$, de même :

$\boxed{\text{Il existe un unique } \beta > 1 \text{ tel que } G(\beta) = \gamma.}$ $\square$

Soit $y \geqslant 1$ fixé quelconque. On a $\gamma = G(\beta) = \lim\limits_{z\to+\infty} f(\beta,z) \leqslant f(\beta,y)$ puisque $z \longmapsto f(\beta,z)$ décroît.
Or $\gamma = f\big(\varphi_\gamma(y),y\big)$. Donc $f\big(\varphi_\gamma(y),y\big) \leqslant f(\beta,y)$. Or $x \longmapsto f(x,y)$ décroît donc $\beta \leqslant \varphi_\gamma(y)$.

$\boxed{\beta \leqslant \varphi_\gamma(y) \text{ pour tout } y \geqslant 1.}$ $\square$

16 La suite (Q_i) étant μ-p.o, on a en particulier en considérant le polynôme $X^{k_i} - X^{k_{i+1}}$:

$$\frac{1}{\mu}\Big(\frac{1}{2k_i+1} + \frac{1}{2k_{i+1}+1}\Big) \leqslant \frac{1}{2k_i+1} + \frac{1}{2k_{i+1}+1} - \frac{2}{k_i+k_{i+1}+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Le membre de droite étant strictement inférieur à $\dfrac{1}{2k_i+1} + \dfrac{1}{2k_{i+1}+1}$, il vient que $\boxed{\mu > 1}$ $\square$

L'inégalité ci-dessus s'écrit encore $\dfrac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_{i+1}+1}}{k_1+k_{i+1}+1} \leqslant \sqrt{\dfrac{\mu-1}{\mu}} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Pour $i \geqslant 1$ on a $k_i \geqslant 1$ puique $i \longmapsto k_i$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on peut écrire $k_{i+1} = x_i k_i$ avec $x_i > 1$ puisque la suite (k_n) est strictement croissante.
En posant $\gamma = \sqrt{\dfrac{\mu-1}{\mu}}$, l'inégalité ci-dessus s'écrit $f(x_i,k_i) \leqslant \gamma$ pour $i \geqslant 1$ avec $x_i > 1$ et $k_i \geqslant 1$.
Or $\gamma \in]0,1[$. Donc $\gamma = f\big(\varphi_\gamma(k_i),k_i\big)$ d'après la question précédente.
Ainsi $f(x_i,k_i) \leqslant f\big(\varphi_\gamma(k_i),k_i\big)$. Or $x \longmapsto f(x,k_i)$ est décroissante. Donc $x_i \geqslant \varphi_\gamma(k_i)$.
D'après la question précédente, il existe $\beta > 1$ ($\beta = G^{-1}(\gamma)$) tel que $\varphi_\gamma(k_i) \geqslant \beta$ pour tout $i \geqslant 1$ (car alors $k_i \geqslant 1$).
Il en découle que $x_i \geqslant \beta$ pour tout $i \geqslant 1$.
En résumé :

$\boxed{\text{Si la suite } (P_{k_i}) \text{ est p.o., il existe } \beta > 1 \text{ tel que } k_{i+1} \geqslant \beta k_i \text{ pour tout } i \geqslant 1.}$ $\square$

——— *FIN* ———