E3A 2020 - MP
Corrigé

pour l'UPS, François Calio, MP Marceau Chartres

Exercice 1

1. On considère la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(p\,q^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. C'est une famille de réels positifs sommable de somme 1 (on reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \in]0,1[$.
Ainsi $\boxed{\text{elle définit une loi de probabilité}}$ dont elle est la famille des probabilités élémentaires.

2. On pose $X' = X + 1$. On a X' variable aléatoire, $X'(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \big(X' = k\big) = \big(X = k-1\big)$ donc $\mathbb{P}(X' = k) = pq^{k-1}$: X' suit donc une loi géométrique de paramètre p. Ainsi X' possède une espérance et donc, par linéarité de l'espérance, $\boxed{X \text{ possède une espérance}}$ et $\mathbb{E}(X') = \mathbb{E}(X) - 1 = \dfrac{1}{p} - 1$ i.e. $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{q}{p}}$

3. La famille $((X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, donc $(X = Y) = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = X))$.

Ainsi par $\sigma-$additivité, $\displaystyle\sum_k \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k))$ converge et $\mathbb{P}(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k))$. Or X et Y sont indépendantes donc $\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k) = p^2 q^{2k}$.
Ainsi $\mathbb{P}(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p^2 \left(q^2\right)^k = p^2 \frac{1}{1-q^2} = \frac{p(1-q)}{(1+q)(1-q)}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(X = Y) = \dfrac{p}{1+q}}$.
La famille $((X = Y), (X < Y), (X > Y))$ forme un système complet dévénements.
Or par symétrie, $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \mathbb{P}(X = Y)\right)$, i.e. $\boxed{\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{q}{1+q}}$.

On pouvait aussi calculer la probabilité : $\mathbb{P}(Y > k) = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^j = q^{k+1}$ pour en déduire la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$ via la formule $\mathbb{P}(X < Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y > k)$...

4. $S = X + Y$ avec X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc S est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, $(S = k) = \displaystyle\bigcup_{j=0}^{k} ((X = j) \cap (Y = k-j))$ union disjointe.

Donc $\mathbb{P}(S = k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\left((X = j) \cap (Y = k-j)\right)$. Or X et Y sont indépendantes, donc :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = k-j) = \sum_{j=0}^{k} pq^j\, pq^{k-j} = (k+1)p^2q^k.$$

Ainsi $\boxed{S(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = k) = (k+1)p^2q^k}$

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = P_n(x) > 0$ comme produit de réels strictement positifs.
Or : si $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n \times \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{n+1}\right)$ avec $u_n > 0$ et $\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{n+1}\right) \geqslant 1$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite $\boxed{(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

2. En reprenant les mêmes notations, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1 > 0$. On peut donc poser $v_n = \ln(u_n)$ et on a : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{k}\right)$.

Or, lorsque k tend vers l'infini, on a : $\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{k}\right) = \ln\left(1+\dfrac{x^2}{2k^2}+o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right) = \dfrac{x^2}{2k^2}+o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes. Ainsi la série $\displaystyle\sum_k \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{k}\right)$ converge et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge i.e. la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $S(x)$ sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\exp(v_n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\exp(S(x))$ i.e. $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$.
En notant $\varphi(x)$ sa limite, on a φ définie sur $J=\mathbb{R}$ et de plus, φ strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. .

3.1. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction P_n est paire, par conservation de la parité par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est paire}}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction P_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car produit de fonctions positives et croissantes), par conservation de la monotonie par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.
Par parité, on a alors $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^-}$

3.2. Par parité, pour montrer la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la continuité de φ sur tout segment de la forme $[0,a]$ avec $a>0$.
Soit $a>0$. On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0,a]$ par : $h_n(x)=\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{n}\right)$. On a $\|h_n\|_\infty^{[0,a]}=\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{a}{n}\right)$ où la notation $\|f\|_\infty^{[0,a]}$ désigne la borne supérieure de $|f(x)|$ lorsque x décrit $[0,a]$ et qui existe pour h_n par continuité de h_n sur le segment $[0,a]$.
Or la série $\sum\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{a}{n}\right)$ est convergente (et de somme $S(a)$ avec les notations de la question 2)).
Ainsi la série de fonction $\sum h_n$ converge normalement sur le segment $[0,a]$ donc elle converge uniformément sur $[0,a]$. Comme pour tout n, h_n est continue sur $[0,a]$, on en déduit que la somme uniforme S est aussi continue sur $[0,a]$. Enfin, par composition, comme $\varphi=\exp oS$, φ est continue sur $[0,a]$. Ceci étant vrai pour tout $a>0$ et φ est paire, donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

4. .

4.1. Soit f la fonction $f=\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$. f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, f est positive et paire. Pour montrer l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de la majorer sur $\mathbb{R}^+$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Or, $\forall x\in\mathbb{R}^+, 0<f(x)\leqslant 2e^{-x}$ car $\forall x\in\mathbb{R}^+, \operatorname{ch}(x)\geqslant\dfrac{1}{2}e^x$, et la fonction $x\to 2e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi f intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et par parité sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{\operatorname{ch}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\theta : u\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\ln(u)\in\mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*}\theta'\times fo\theta$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Or on vient d'établir que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ est une intégrale convergente, et on a donc l'autre aussi et : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f=\int_0^{+\infty}\frac{2}{u^2+1}\,du$.
Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\operatorname{ch}}=\pi}$

4.2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et $\forall n\in\mathbb{N}^*, P_n(x)\geqslant P_1(x)=\operatorname{ch}(x)>0$.
Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}, 0<\dfrac{1}{\varphi(x)}\leqslant\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$. Or on vient de voir que $\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, comme $\dfrac{1}{\varphi}$ est continue positive, $\boxed{\dfrac{1}{\varphi} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

Exercice 3

Questions de cours

1. Avec $a \neq 0$. Si s_1 et s_2 sont les racines de aX^2+bX+c, on a : $aX^2+bx+c = a(X-s_1)(X-s_2)$ donc $\boxed{\sigma_1 = s_1+s_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } \sigma_2 = s_1 s_2 = \frac{c}{a}}$

2. On note $\mathcal{C}$ l'équation caractéristique

— Si r_1 et r_2 sont deux solutions réelles distinctes de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \big| \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n}$

— Si r est solutions double de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \big| \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An+B)r^n}$

— Si $\mathcal{C}$ possède deux racines r_1 et r_2 non réelles conjuguées. On note ces racines $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0,\pi[$. Alors $\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \big| \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta))r^n}$

****

1. La suite $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathscr{C}$

2.
- $\mathscr{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).
- Soit $(x,x') \in \mathscr{C}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = \alpha x + \beta x'$ et on note x_n, x'_n, y_n les termes généraux des suites x, x', y'.
  On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{-n} = \alpha x_{-n} + \beta x'_{-n}$.
  Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Comme les suites $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.
  Ainsi $y \in \mathscr{C}$. Et donc $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est un sous-espace de } E}$

3. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{C}$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqslant A$.
De même, la suite $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{-n}| \leqslant B$.
On pose alors $C = \max(A,B)$, et on a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leqslant C$: la suite x est bornée.
Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathscr{C} \text{ est bornée}}$

4. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{C}$. Soit $y = T(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$. Ainsi :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- De même $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Ainsi $y \in \mathscr{C}$.
On en déduit que T est une application de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$.
Montrons la linéarité. Soit $(x,x') \in \mathscr{C}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = T(x)$, $y' = T(x')$, $z = \alpha x + \beta x'$, et $w = T(z)$ et $v = \alpha y + \beta y'$. On doit établir : $T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(x')$ i.e. $v = w$. On note $x_n, x'_n, y_n, y'_n, z_n, w_n, v_n$ les termes généraux des suites x, x', y, y', z, w, v. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$v_n = \alpha y_n + \beta y'_n = \alpha(x_{n-1}+x_{n+1}) + \beta(x'_{n-1}+x'_{n+1}) = (\alpha x_{n-1} + \beta x'_{n-1}) + (\alpha x_{n+1} + \beta x'_{n+1})$. Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1} + z_{n+1} = w_n$. Donc $v = w$.
Ainsi T est bien une application linéaire de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$ i.e. $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}}$

5.
- Méthode 1. On a clairement $S \circ S = \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathscr{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ et donc son axe, $\ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, et sa direction, $\ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, sont supplémentaires dans $\mathscr{C}$.
  Or on a tout aussi clairement $F = \{x \in \mathscr{C}; \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\} = \{x \in \mathscr{C}; S(x) = x\} = \ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $G = \ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathscr{C}}$
- Méthode 2. On a $F = \ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $G = \ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, propres pour l'endomorphisme S, associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1. Donc F et G sont en somme directe

i.e. $F+G=F\oplus G$.
De plus, si $x\in\mathscr{C}$, $x'=\dfrac{1}{2}(x+S(x))$ et $x''=\dfrac{1}{2}(x-S(x))$, on montre aisément $x=x'+x''$, $x'\in F$ et $x''\in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, on a $\mathscr{C}=F+G$.
Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{C}}$

6. En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a : $\boxed{S \text{ symétrie d'axe } F \text{ et de direction } G}$

7. .

7.1. Si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$. Soit $x\in\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_{n-1}+x_{n+1}=\lambda x_n$. En particulier : $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+2}-\lambda x_{n+1}+x_n=0$ et, en posant $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n\in\mathbb{N}, x'_{n+2}-\lambda x'_{n+1}+x'_n=0$. On considère donc l'équation caractéristique $\mathcal{C}$ de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2-\lambda X+1=0$ dont le discriminant est $\Delta=\lambda^2-4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2

- Si $\Delta>0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1.
  D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A,B,C,D tels que : $\forall n\in\mathbb{N}, x_n=Ar^n+\dfrac{B}{r^n}$ et $x'_n=Cr^n+\dfrac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc $A=0=C$. De plus $x_0=x'_0$ donc $B=D$. Enfin $x'_1+x_1=\lambda x_0$ donc $(\lambda-2r)B=0$. Or les racines de $\mathcal{C}$ sont $\dfrac{\lambda\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ donc $|\lambda-2r|=\sqrt{\Delta}\neq 0$. Ainsi $B=D=0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})\subset\{0_{\mathscr{C}}\}$
  S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}$
- Si $\Delta<0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont complexes non réelles et conjugués distinctes et de produit 1. Donc elles sont de module 1 et on peut les écrire sous la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta\in]0,2\pi[$.
  D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A,B,α,β tels que : $\forall n\in\mathbb{N}, x_n=A(\cos(n\theta+\alpha))$ et $x'_n=B(\cos(n\theta+\beta))$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta+\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta+\beta))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent [1] car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A=0=B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})\subset\{0_{\mathscr{C}}\}$
  S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}$

Ainsi si $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$, $\boxed{\ker(T-\lambda\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}}$

7.2. On applique le résultat précédent avec $\lambda=0$. On a $\ker(T)=\{0_{\mathscr{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{T \text{ est injectif}}$

7.3.
- Si $\lambda=2$. Soit $x\in\ker(T-2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=A+Bn$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $B=0$ et donc x est une suite constante.
  Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\ker(T-2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.
  Ainsi $\boxed{\ker(T-2\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$
- Si $\lambda=-2$. Soit $x\in\ker(T+2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_{n+2}+2x_{n+1}+x_n=0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=(A+Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $B=0$ et, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $A=0$ donc x est la suite nulle.
  Ainsi $\boxed{\ker(T+2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=\{0_{\mathscr{C}}\}}$

7.4. Avec les 3 questions précédentes, on a établi que $\boxed{T \text{ ne possède qu'une valeur propre : } 2}$

8. .

8.1. Soit $x\in\mathscr{C}$. D'après la question 2, on sait que x est bornée, donc il existe $A>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{Z}, |x_n|\leqslant A$. Ainsi, si on pose $u_n=\dfrac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{2A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge i.e. $\boxed{N(x) \text{ est bien définie}}$.

8.2.
- N est bien une application de $\mathscr{C}$ vers $\mathbb{R}^+$

1. Fallait-il démontrer ce résultat classique ici ?

- Séparation. Soit $x \in \mathscr{C}$ telle que $N(x)=0$. On note $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $u_n=\dfrac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$. On a $N(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n=0$ alors que $\sum u_n$ est une série convergente de réels positifs. Donc comme la somme est nulle, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=0$. En particulier, $\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=0$ i.e. x est la suite nulle.
- Homogénéité. Soit $x\in\mathscr{C}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $y=\lambda x$, $u_n=\dfrac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n=\dfrac{|y_n|+|y_{-n}|}{2^n}$ en notant les termes généraux de x et de y sous la forme x_n et y_n. On a :
$\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\dfrac{|\lambda x_n|+|\lambda x_{-n}|}{2^n}=|\lambda|\dfrac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}=|u_n|$. Ainsi par linéarité du passage à la somme pour les séries convergentes, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n=|\lambda|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ i.e. $\underline{N(\lambda x)=|\lambda|\,N(x)}$
- Inégalité triangulaire. Soit $(x,y)\in\mathscr{C}^2$. Soit $z=x+y$. On note x_n,y_n,z_n les termes généraux de ces suites. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, |z_n|=|x_n+y_n|\leqslant|x_n|+|y_n|$.
Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{|z_n|+|z_{-n}|}{2^n}\leqslant\dfrac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}+\dfrac{|y_n|+|y_{-n}|}{2^n}$.
Donc en passant à la somme, on obtient $\underline{N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)}$

Ainsi $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathscr{C}}$

8.3. Soit $x\in\mathscr{C}$ et $x'=S(x)$. On note $u_n=\dfrac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n=\dfrac{|x'_n|+|x'_{-n}|}{2^n}$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=v_n$ donc $N(x')=N(x)$.
Ainsi S conserve la norme N i.e. $\boxed{S \text{ est une isométrie de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C},N)}$.
En prenant $k=1$, on a établi : $\forall x\in\mathscr{C}, N(S(x))\leqslant kN(x)$. Ainsi par caractérisation de la continuité des applications linéaires, $\boxed{S \text{ est un endomorphisme continu de } (\mathscr{C},N)}$.

8.4. $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ est également une application continue de $(\mathscr{C},N)$ vers lui-même, donc $R=S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ est continue sur $(\mathscr{C},N)$. Donc $F=\ker(S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}})=R^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc $\boxed{F \text{ est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C},N)}$.
De même $\boxed{G \text{ est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C},N)}$ car $G=(S+\mathrm{id}_{\mathscr{C}})^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$.

8.5. On considère la suite $\left(x^{(P)}\right)_{P\in\mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $\mathscr{C}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{Z}, x_n^{(P)}=2^n$ si $n\in[\![1,P]\!]$, $x_n^{(P)}=0$ sinon. Les suites $x^{(P)}$ sont bien dans $\mathscr{C}$ et on a $N\left(x^{(P)}\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{P}1=P$ et $\left\|x^{(P)}\right\|_\infty=2^P$. Comme la suite $\left(\dfrac{2^P}{P}\right)_{P\in\mathbb{N}^*}=\left(\dfrac{\|x^{(P)}\|_\infty}{N\left(x^{(P)}\right)}\right)_{P\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, on ne peut pas trouver de constante $K>0$ telle que $\forall x\in\mathscr{C}\setminus\{0_{\mathscr{C}}\}, \|x\|_\infty\leqslant KN(x)$.
Ainsi $\boxed{\text{les deux normes } N \text{ et } \|\ \|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes}}$

Exercice 4

1. La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de problème.
Pour la non dégénérescence : Soit $P\in E$ tel que $\langle P|P\rangle=0$. On a $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,dt=0$. P^2 est une fonction continue positive sur $[0,1]$ dont l'intégrale sur cet intervalle est nulle, ainsi P^2 est la fonction nulle sur $[0,1]$. Ainsi P s'annule une infinité de fois sur $[0,1]$, donc, comme il s'agit d'un polynôme, $P=0_E$. Ainsi $\boxed{\langle .\,|\,.\rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } E=\mathbb{R}_n[X]}$.

2. Si F est un sev de E de dimension p, $F^\perp$ est un sous espace de E supplémentaire à F.
Donc $\dim\left(F^\perp\right)+\dim(F)=\dim(E)$ i.e. $\boxed{\dim\left(F^\perp\right)=n+1-p}$

3. Si $n=2$. Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension $p=2$, $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ est de dimension 1. On cherche donc les polynômes $Q=aX^2+bX+c$ orthogonaux à tous les polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$. Il faut et il suffit que de tels polynômes soient orthogonaux à 1 et à X. Ainsi :

$$Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_1[X]^\perp \iff \begin{cases} \langle aX^2+bX+c | 1\rangle = 0 \\ \langle aX^2+bX+c | X\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c = 0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6c \\ b = -6c \end{cases}$$

Ainsi , comme $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ est de dimension 1, $\boxed{\big(6X^2-6X+1\big) \text{ constitue une base de } \mathbb{R}_1[X]^\perp}$.

4. .

4.1. $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \setminus \{O_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ donc $\deg(L) \leqslant n$.

Par l'absurde, si $\deg(L) < n$. Alors $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc, comme ces sous-espaces sont supplémentaires, L est nul ce qui est impossible car on a pris L non nul. Ainsi $\boxed{L \text{ est de degré } n}$

4.2. .

4.2.1. On écrit $L = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on a $a_n \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \to L(t)t^x$ est donc la fonction $t \to \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^{k+x}$ qui est continue sur $]0,1]$ et intégrable si $x > -1$.

De plus $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t)t^x\,dt = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 a_k t^{k+x} = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+x+1}$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est une fonction rationnelle}}$. On identifiera dans la suite la fonction rationnelle et la fraction rationnelle

4.2.2. Les pôles de φ sont parmi les $-(k+1)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$, et ils sont au plus d'ordre 1 car $\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)\right)\varphi$ est polynomiale.

L étant orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, les éléments de $[\![0,n-1]\!]$ sont au moins des zéros de φ d'ordre au moins 1.

En écrivant φ sous forme irréductible $\varphi = \dfrac{P}{Q}$ alors on a $\deg(P) \geqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n+1$. Donc φ est de degré supérieur ou égal à -1 avec égalité si et seulement si P est de degré n et Q de degré $n+1$

Or φ est la somme de fractions de la forme $\dfrac{a_k}{X+k+1}$ qui sont de degré -1 ou $-\infty$, correspondent à des poles différents et dans laquelle au moins un des termes est non nul $\dfrac{a_n}{X+n+1}$, donc la somme est de degré -1 . Ainsi P est degré n et Q de degré $n+1$

et donc $\boxed{\text{les poles de } \varphi \text{ sont les } -(k+1) \text{ pour } k \in [\![0,n]\!] \text{ et ils sont d'ordre 1}}$ et

$\boxed{\text{les zéros de } \varphi \text{ sont les } k \text{ pour } k \in [\![0,n-1]\!] \text{ et ils sont d'ordre 1}}$

4.2.3. Plus précisément, on écrit P sous la forme $P = \lambda\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ et $Q = \beta\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)$ avec λ et λ non nuls. Ainsi il existe $\alpha \neq 0$ tel que $\boxed{\varphi = \alpha\dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}}$

4.3. On décompose en éléments simples la fraction $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)}$. On a : $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X+k+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{X+k+1}$

avec $b_k = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(-k-1-j)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(-k+j)\prod_{j=k+1}^{n}(-k+j)}$ en convenant que le produit sur une partie vide vaut 1.

Ainsi $b_k = (-1)^{n-k}\dfrac{(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!}$.

Donc par unicité de la décomposition en éléments simples de φ, on a :
$\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = \alpha b_k = \alpha(-1)^{n-k}\dfrac{(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!}$.
Donc le polynome L vaut : $L = \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n+k)!}{k!\,k!\,(n-k)!}X^k$. Ainsi, comme on sait que $\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ est de dimension 1, on a : $\boxed{\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n+k)!}{(k!)^2\,(n-k)!}X^k\right)}$

Exercice 5

1. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0,1[$, on pose $k = \lfloor nt \rfloor$ la partie entière de nt. On a $k \leqslant nt < k+1$ donc $t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right[$ et donc $fn(t) = w_{k+1}$.
Ceci étant vrai pour tout t, on a donc : $\boxed{\forall t \in [0,1[, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor +1}}$

3. Soit $t \in [0,1]$.

- Si $t = 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_n$ qui tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini.
- Si $t \in]0,1[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor +1}$ donc par composition des limites, $f_n(t)$ tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$
- Si $t = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(t) = w_1$.

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers la fonction } \delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}}$

4.
- Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0,1]$.
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $\delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ qui est une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$
- On pose φ la fonction constante sur $[0,1]$ égale à $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$, qui existe car la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente donc bornée. Cette fonction φ est continue par morceaux et donc intégrable sur le segment $[0,1]$ et de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

Ainsi, on a bien vérifiée ici les hypothèses du théorème de convergence dominée et on a : $\left(\displaystyle\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite vaut $\displaystyle\int_{[0,1]} \delta$. On en déduit le résultat : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \ell}$, résultat connu sous le nom de lemme de Cesaro