WL81

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I :

1) Déterminer le rayon de convergence R strictement positif de la série entière $\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$.

2) a) Calculer $\int_0^1 t^{3n} dt$ où n est un entier naturel.

   b) En déduire, en justifiant avec soin, la permutation des symboles $\sum$ et $\int$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{3n+1}$ lorsque x appartient à l'intervalle $]-R, R[$.

   (Il pourra être utile pour les calculs de poser : $a = \sqrt[3]{x}$)

3) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et calculer sa somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice II :

Soit n un entier strictement positif, A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. On définit deux matrices U et V carrées d'ordre $2n$ à coefficients complexes par :

$$U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Première partie.

Dans cette partie, on suppose que les deux matrices U et V sont semblables, c'est à dire qu'il existe une matrice P inversible d'ordre $2n$ à coefficients complexes vérifiant l'égalité :

$$U = P^{-1}VP$$

1) Soit R un polynôme à coefficients complexes. Montrer que :

$$R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ 0 & R(A) \end{pmatrix}$$

où R' est le polynôme dérivé du polynôme R.

2) On note $\prod$ le polynôme minimal de la matrice A, c'est à dire le polynôme unitaire annulateur de la matrice A de plus petit degré α strictement positif. On pose $\prod(X) = \sum_{p=0}^{\alpha} b_p X^p$.

   Déterminer la matrice V^k pour k entier naturel, en déduire la matrice $\prod(V)$.

3) Établir l'égalité : $\alpha \prod(X) = X \prod'(X)$, où $\prod'$ est le polynôme dérivé du polynôme $\prod$.

4) En déduire que la matrice A est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier N tel que $A^N = 0$.

Deuxième partie.

Dans cette partie, on suppose que la matrice A carrée d'ordre n à coefficients complexes vérifie la propriété suivante :

$$A^n = 0 \quad \text{et } A^{n-1} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer une matrice D diagonale d'ordre n telle que :

$$DJ - JD = J.$$

3) Déterminer une matrice H carrée d'ordre n telle que : $HA - AH = A$.

4) Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

5) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$sont semblables.

Exercice III :

On considère, trois réels α, β et γ non nuls et la quadrique $(\sum)$ dont une équation est

$$\alpha^2 (x+y+z)^2 + \beta^2 (-x+y)^2 + \gamma^2 (2y+z)^2 = 1$$

dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ d'un espace affine de dimension trois.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+y+z=0$ et $-x+y=0$ sont orthogonaux.

   b) On note $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ les deux vecteurs unitaires, d'abscisses positives, normaux respectivement aux plans (P) et (Q). Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ ainsi que le vecteur $\overrightarrow{K}$ tel que le repère $\mathcal{R}' = \left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ soit orthonormé direct.

   c) Déterminer une équation de la quadrique $(\sum)$ dans le repère $\mathcal{R}'$. On notera X, Y et Z les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

   d) Que peut-on dire de la nature de la quadrique $(\sum)$?

2) On note $(\mathcal{E})$ la conique obtenue comme intersection de la quadrique $(\sum)$ avec le plan d'équation $Z = 0$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

   Réduire l'équation de la conique $(\mathcal{E})$. En déduire qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}'' = \left(O, \overrightarrow{I'}, \overrightarrow{J'}, \overrightarrow{K'}\right)$ tel que l' équation dans le repère $\mathcal{R}''$ de la quadrique $(\sum)$ soit de la forme :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$$

   avec $0 < a < b$. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}''$ sont notées X', Y' *et* Z'.

3) Soit k un réel quelconque, on appelle (P_k) le plan dont une équation dans le repère $\mathcal{R}''$ est :

$$\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

   a) En considérant l'expression :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}\left(X'^2 + Y'^2 + Z'^2\right)$$

   montrer que l'intersection $(\mathcal{C}_k)$ du plan (P_k) et de la quadrique $(\sum)$ est l'intersection du plan (P_k) avec une sphère (S_k) dont on précisera le centre Ω_k et le rayon R_k.

   b) Montrer que l'ensemble $(\mathcal{C}_k)$ est un cercle dont on précisera le rayon.

   c) Que peut-on dire du rayon du cercle $(\mathcal{C}_k)$? Pouvait-on le prévoir?