Lionel Girard, Lycée Paul Éluard, 93 Saint-Denis
lionel.girard5@wanadoo.fr

E3A 2005, MP-B

Exercice 1.

1. L'application φ est clairement une forme symétrique (commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$), bilinéaire (structures d'algèbres de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}$).

   De plus, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P,P) = \sum_{i=1}^{n+1} P^2(x_i) \geqslant 0$ (φ est positive) et si $\varphi(P,P) = 0$, alors on a $P^2(x_i) = 0$ pour tout i de $[\![1, n+1]\!]$, donc P de $\mathbb{R}_n[X]$ admet au moins $n+1$ racines, et nécessairement il est nul (φ est définie).

   Finalement, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. a) Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on a $\deg(P_k) = (n+1)-(k+1)+1 = n-k+1$, donc $\{\deg(P_k),\ k \in [\![1, n]\!]\} = [\![1, n]\!]$. Avec $\deg(P_{n+1}) = 0$, la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est échelonnée en degré dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc elle est libre de cardinal $n+1$, donc c'est une base de l'espace, de dimension $n+1$, $\mathbb{R}_n[X]$.

   (liberté : si $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k P_k = 0$ avec $\{k \in [\![1, n+1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\} \neq \emptyset$, alors si r est le minimum de cet ensemble, on a $\lambda_r P_r = -\sum_{k=r+1}^{n+1} \lambda_k P_k \in \mathbb{R}_{n-r}[X]$, ce qui est faux puisque $\deg(P_r) = n-r+1$)

   $$\boxed{(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]} \ .$$

   b) Pour tout (i,k) de $[\![1, n+1]\!]^2$, on a $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$, où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 lorsque $i = k$ et 0 sinon.

   Ainsi, pour tout (i,j) de $[\![1, n+1]\!]^2$,
   $$\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=1}^{n+1} L_i(x_i)\, L_j(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \delta_{i,k}\, \delta_{j,k} = \delta_{i,j},$$
   ce qui signifie que $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est donc libre (famille orthogonale de vecteurs non nuls) et c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Pour tout i de $[\![1, n+1]\!]$, on a
   $$\varphi(P_i, L_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i(x_k)\, L_i(x_k) = P(x_i) = \prod_{j=i+1}^{n+1} (x_j - x_i),$$

ce qui avec l'hypothèse $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ donne $\varphi(P_i, L_i) > 0$.

Les deux familles $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ et $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ étant des bases de $\mathbb{R}_n[X]$, elles engendrent le même espace.

Pour tout i de $[\![1, n+1]\!]$ et tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(L_i, P) = P(x_i)$.

Pour $i \leqslant n$, la famille $(L_j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ engendre le sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall l \geqslant i+1,\ P(x_l) = 0\}.$$

Or pour tout k de $[\![1, i]\!]$, $P_k \in F_i$ car pour tout $l \geqslant k+1$, $P_k(x_l) = 0$, donc l'espace G_i engendré par la famille $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant i}$ est inclus dans F_1. Or les deux familles $(L_j)_{1\leqslant j\leqslant i}$ et $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant i}$ sont libres et de même cardinal, donc $\dim F_i = \dim G_i$, c'est-à-dire $F_i = G_i$.

Finalement,

$$\boxed{\text{la famille orthonormée associée à } (P_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1} \text{ est la famille } (L_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}}\ .$$

3. a) Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on a

$$\boxed{X^k = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(X^k, L_i)\, L_i = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^k\, L_i}\ .$$

b.i) On pose $Q(X) = \prod_{i=2}^{n+1}(X - x_1)$. On a $\deg(Q) = n$ et il existe un $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, X^j$. On a $a_n = 1$, donc en notant C_j la j-ème colonne de la matrice dont il s'agit de calculer le déterminant, avec l'opération élémentaire $C_{n+1} \leftarrow \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot C_{j+1}$, on obtient, avec $\sum_{j=0}^{n} a_j\, x_i^j = Q(x_i) = 0$ pour tout i de $[\![2, n+1]\!]$,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & Q(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & 0 \end{vmatrix},$$

et en développant suivant la dernière colonne,

avec $(-1)^{1+(n+1)}\, Q(x_1) = \prod_{i=2}^{n+1}(x_i - x_1)$, on obtient

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}}.$$

b.ii) En poursuivant le calcul initialisé dans b.i) on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=3}^{n+1}(x_i - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} \end{vmatrix},$$

et par une récurrence d'écriture malaisée, entre autres à cause des notations de l'énoncé mais pas seulement, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)\,,$$

c'est-à-dire en notant $\mathcal{B}' = (L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$,

$$[\det_{\mathcal{B}'}(1, X, \cdots, X^n)]^2 = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \right)^2.$$

c) Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\det_{\mathcal{C}'}(1, X, \cdots, X^n) = \det_{\mathcal{C}'}(C) \times \det_{\mathcal{C}}(1, X, \cdots, X^n).$$

Si les deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont orthonormées, la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale et son déterminant est de valeur absolue égale à 1, c'est-à-dire : $|\det_{\mathcal{C}'}(1, X, \cdots, X^n)| = |\det_{\mathcal{C}}(1, X, \cdots, X^n)|$.

d) On note $X_i = X^{i-1}$ pour tout i de $[\![1, n+1]\!]$. Le procédé de Schmidt associe à la base canonique $\mathcal{B}_c = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une base orthonormée $\mathcal{D} = (T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ et si l'on note $T = [t_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ la matrice de $\mathcal{B}_c$ dans $\mathcal{D}$, on a pour tout (i, j) de $[\![1, n+1]\!]^2$, $t_{i,j} = \varphi(X_j, T_i)$. Avec $\mathcal{D}$ orthonormée et $X_j \in \mathrm{Vect}(T_1, \cdots, T_j)$ par construction, on a $t_{i,j} = 0$ si $i \geqslant j + 1$, c'est-à-dire que la matrice est triangulaire supérieure.

e) On a $[\det_{\mathcal{D}}(1, X, \cdots, X^n)]^2 = \det(T)^2 = \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{i,i}\right)^2$, avec

$$t_{i,i}^2 \leqslant \varphi(X_i, X_i) \cdot \varphi(T_i\, T_i),\ \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}.$$

Pour tout p de $[\![1, n+1]\!]$, on a $\varphi(X_p, X_p) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p}$ et pour tout i de $[\![1, n+1]\!]$, on a $\varphi(T_i, T_i) = 1$ puisque la base $\mathcal{D}$ est orthonormée, et finalement, avec le résultat de 3.c), en élevant au carré pour chasser la valeur absolue, on a

$$\boxed{\left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)\right)^2 \leqslant \prod_{p=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{2p}\right)}.$$

Exercice 2.

1. a) Par récurrence sur n il existe une C_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que
$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & C_n \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$
En effet, c'est vrai pour $n = 0$, avec $C_0 = 0$ (et pour $n = 1$ avec $C_1 = C$). Si c'est vrai au rang n, alors
$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} A^n & C_n \\ 0 & B^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{n+1} & A^n\, C + C_n\, B \\ 0 & B^{n+1} \end{pmatrix},$$
donc c'est vrai au rang $n+1$, avec $C_{n+1} = A^n\, C + C_n\, B$.
Alors, pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k\, X^k$ avec $p \geqslant 1$ de $\mathbb{C}[X]$, on a
$$P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k\, M^k = \begin{pmatrix} P(A) & D \\ 0 & P(B) \end{pmatrix},$$
avec $D = \sum_{k=0}^{p} a_k\, C_k = \sum_{k=1}^{p} a_k\, C_k$.
b) Comme M est diagonalisable il existe un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$ et avec le résultat précédent on a
$$P(A) = P(B) = 0.$$
c) Les deux matrices A et B admettent donc un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc, par théorème, elles sont diagonalisables.
2. a) On a
$$M\, N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & C\, B \\ 0 & B^2 \end{pmatrix},$$
$$\text{et } N\, M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & A\, C \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}.$$
Avec l'hypothèse $A\, C = C\, B$, on en déduit $M\, N = N\, M$.
b) Considérons $E = \mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique et soit f et g les deux endomorphismes canoniquement associés à M et N (c'est-à-dire

déterminés par le fait que M est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et N la matrice de g dans la même base).

On a donc $f \circ g = g \circ f$ avec f et g diagonalisables : c'est vrai pour f car M est diagonalisable et c'est vrai pour g, car avec $P(A) = P(B) = 0$ on a $P(N) = 0$ pour le polynôme de la question 1.b) (il suffit de reprendre le résultat de 1.a avec $C = 0$, donc $C_k = 0$ pour tout k de $\mathbb{N}$) et donc N est diagonalisable.

Si $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est le spectre de f (avec $i \neq j \Longrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$), en posant $E_i = \ker(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})$, on a $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$.

De plus, pour tout i de $[\![1, k]\!]$, on a

$$(f - \lambda_i \, Id) \circ g = f \circ g - \lambda_i \, g = g \circ f - \lambda_i \, g = g \, (f - \lambda_i \, Id),$$

donc par théorème E_i est stable par g et l'endomorphisme g_i induit par g sur E_i est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_i constituée de vecteurs propres pour g et, comme éléments de E_i, propres pour f. Alors $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (car la somme est directe) constituée de vecteurs propres pour f et pour g.

Si on note R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique, c'est-à-dire R^{-1} la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, les deux matrices $R \, M \, R^{-1}$ et $R \, N \, R^{-1}$ sont les matrices respectives de f et g dans la base $\mathcal{B}$ donc sont diagonales, notées respectivement D et D' et on a finalement

$$M = R^{-1} \, D \, R \text{ et } N = R^{-1} \, D' \, N.$$

c) On a alors $\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M - N = R^{-1} \, (D - D') \, R$, donc $M - N$ est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}$$

3. La formule du déterminant par blocs donne

$$\chi_{M-N}(t) = \begin{vmatrix} -t \, I_n & C \\ 0 & -t \, I_n \end{vmatrix} = (-t)^{2n} = t^{2n}.$$

La seule valeur propre de $M - N$ est donc 0 et $M - N$ est semblable à la matrice nulle, donc est elle-même nulle, ce qui donne $C = 0$.

On obtient le résultat : si M est diagonalisable avec $A \, C = C \, B$, alors $C = 0$.

Exercice 3.

1. C'est du cours, il s'agit d'une parabole de foyer l'origine et d'axe focal (Ox).

   Avec $r(-\theta) = r(\theta)$ on a la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (axe focal) et on peut se contenter de l'étude sur l'intervalle $]0, \pi]$.

   On a $\lim\limits_{\theta \to 0} r(\theta) = +\infty$ et $r(\theta)\,\sin(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta/2)}$, d'où $\lim\limits_{\substack{\theta \to 0 \\ \theta > 0}} r(\theta)\,\sin(\theta) = +\infty$: la courbe admet une branche parabolique dans la direction des x positifs.

   Enfin, avec $r'(\theta) = -\frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}$, $r(\theta)$ décroit pour θ variant de 0 à π.

   On a $r(\pi) = \frac{1}{2}$ et $r'(\pi) = 0$ et $r(\frac{\pi}{2}) = 1$, $r'(\frac{\pi}{2}) = -1$, ce qui permet un tracé précis en ces deux points.

   Avec $r = 1 + r\,\cos\theta$ on obtient $r^2 = (1 + r\,\cos\theta)^2$ et une équation cartésienne
   $$x^2 + y^2 = 1 + 2\,x + x^2, \ \text{ c'est-à-dire } y^2 = 2\,(x + \tfrac{1}{2}).$$
   Le sommet est $S(-\frac{1}{2}, 0)$ et la directrice est la droite d'équation $x = -1$.

2. a) On a $M\begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} \\ \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$, et $N\begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta}{1-\cos\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$.

   La droite (M, N) a pour équation $\begin{vmatrix} x - \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} & -\cos\theta \\ y - \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} & \sin\theta \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire : $x\,\sin\theta + y\,\cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}$.

   Elle est de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$ et il existe un λ de $\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \cdot \overrightarrow{n}$.

   Avec $\lambda = \frac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}$, on obtient finalement $\boxed{H\begin{pmatrix} \frac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}\,\sin\theta \\ \frac{\sin(2\theta)}{1-\cos\theta}\,\cos\theta \end{pmatrix}}$.

   b) Pour $\theta \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$, on a $H = O \iff \sin(2\theta) = 0$, c'est-à-dire $\theta \in \frac{\pi}{2}\,\mathbb{Z}$.
   Pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, on obtient
   $$OH = \frac{|\sin(2\theta)|}{1-\cos\theta}, \text{ donc}$$
   $$\boxed{\cos\varphi = \text{signe}[\sin(2\theta)] \times \sin\theta \text{ et } \sin\varphi = \text{signe}[\sin(2\theta)] \times \cos\theta}.$$

   c) Pour $\theta \in U_1 = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, on a $\sin(2\theta) > 0$, donc $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ et une équation polaire pour cet ensemble est $r_1(\varphi) = OH = \frac{\left|\sin[2\,(\frac{\pi}{2} - \varphi)]\right|}{1-\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi}$.

Pour $\theta \in U_2 = \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, on a $\sin(2\theta) < 0$, donc $\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} - \theta$, c'est-à-dire $\theta = \frac{3\pi}{2} - \varphi$ et une équation polaire pour cet ensemble est $r_2(\varphi) = OH = \frac{\left|\sin[2\,(\frac{3\pi}{2} - \varphi)]\right|}{1-\cos(\frac{3\pi}{2}-\varphi)} = \frac{-\sin(2\varphi)}{1+\sin\varphi}$.

Avec $r_2(\varphi) = -r_1(\varphi+\pi)$, on peut prendre comme équation polaire pour tout φ de $\mathbb{R}\backslash\pi\,\mathbb{Z}$, $r(\varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi}$, formule qui est évidemment valable pour $\varphi = 0\,[2\,\pi]$ qui correspond au cas où $\theta = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}\,[2\,\pi]$ qui correspond au cas où $\theta = \pi\,[2\pi]$ et pour $\varphi = \pi\,[2\,\pi]$ qui correspond au cas où $\theta = \frac{3\pi}{2}\,[2\pi]$

Finalement, $\boxed{\mathcal{E} \text{ est d'équation polaire } r(\varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{1-\sin\varphi}}$.

3. a) La fonction r est 2π-périodique et $r(\pi - \varphi) = -r(\varphi)$, donc la courbe admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie et on peut se contenter de l'étude sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   b) Sur cet intervalle on a

$$\begin{array}{l} r(\varphi) = 0 \iff \varphi \in \{-\frac{\pi}{2}, 0\} \\ r(\varphi) > 0 \iff \varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ r(\varphi) < 0 \iff \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\end{array}.$$

   c) On pose $u = \varphi - \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\varphi = u + \frac{\pi}{2}$ et $f(u) = r(\varphi)$. On a

$$f(u) = \frac{-\sin(2u)}{1-\cos u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{-2u}{\frac{u^2}{2}} = -\frac{4}{u}.$$

   On a donc $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}^-} r(\varphi) = +\infty$.

   Alors $Y(u) = f(u)\,\sin u = \frac{-\sin(2u)\,\sin u}{1-\cos u} = -\frac{[2u - \frac{(2u)^3}{6} + o(u^3)]\,[u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)]}{\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{24} + o(u^4)}$,

$$Y(u) = -\frac{u^2}{u^2}\,\frac{[2 - \frac{4u^2}{3} + o(u^2)]\,[1 - \frac{u^2}{6} + o(u^2)]}{\frac{1}{2} - \frac{u^2}{24} + o(u^2)} = -\frac{[2 - \frac{5\,u^2}{3} + o(u^2)]}{\frac{1}{2} - \frac{u^2}{24} + o(u^2)},$$

$$Y(u) = -4\,\frac{[1 - \frac{5\,u^2}{6} + o(u^2)]}{1 - \frac{u^2}{12} + o(u^2)} = -4\,[1 - \frac{5\,u^2}{6} + o(u^2)]\,[1 + \frac{u^2}{12} + o(u^2)],$$

$$Y(u) = -4\,[1 - \frac{9\,u^2}{12} + o(u^2)] = -4 + 3\,u^2 + o(u^2).$$

   On en déduit que dans le repère mobile $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ la droite d'équation $Y = -4$ est asymptote à $\mathcal{E}$ et que la courbe est localement au dessus de son asymptote, c'est-à-dire dans le repère d'origine :

   la droite d'équation $x = 4$ est asymptote à $\mathcal{E}$ et la courbe est localement à gauche de son asymptote.

   d) Les points stationnaires sont ceux qui vérifient $\big(r(\varphi), r'(\varphi)\big) = (0, 0)$. Avec $r'(\varphi) = \frac{2\,\cos(2\varphi)}{1-\sin\varphi} + \frac{\sin(2\varphi)\,\cos\varphi}{(1-\sin\varphi)^2}$ on a $r'(0) = 2 \neq 0$, et $r'(-\frac{\pi}{2}) = -1 \neq 0$: il n'y a pas de point stationnaire.

4. Avec Maple on obtient (on reconnaitra la parabole $\mathcal{P}$ et la courbe $\mathcal{E}$)