E3A, 2004, MP, Mathématiques B

(6 pages)

Exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2} \int_0^{x} e^{u^2}\,(-\mathrm{d}u) = -g(x)$ en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale . Ainsi $\underline{g \text{ est impaire}}$.

2. L'application $t \longmapsto e^{t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto \int_0^{-x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x\,e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t + e^{-x^2} e^{x^2} = -2x\,g(x) + 1$. Donc $\underline{g \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}}$.

3. L'équation (E) est une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$ qui admet donc, suivant le théorème de Cauchy, comme ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ un espace affine de direction l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(H) : y' + 2xy = 0$. Les solutions de (H) sur étant les fonctions $x \longrightarrow C\,e^{-x^2}$ où C est une constante réelle si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$, complexe si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on obtient que :

$$\underline{\text{les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } \mathbb{K} \text{ sont les fonctions } x \longrightarrow g(x) + C\,e^{-x^2} \text{ avec } C \in \mathbb{K}}\ .$$

4. (a) Si $R > 0$ et le rayon de convergence de $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ et $\forall x \in]-R, R[,\ y(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, on a

$$\forall x \in]-R,R[, \quad y'(x) + 2x\,y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i + 2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Big((i+1) a_{i+1} + 2 a_{i-1} \Big) x^i$$

et si y est solution de (E) sur $]-R, R[$ alors $\forall i \geqslant 1,\ (i+1)a_{i+1} + 2a_{i-1} = 0$ soit $\underline{\forall i \geqslant 0,\ (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0}$.

(b) $\diamond$ On obtient aussi $\underline{a_1 = 1}$.

$\diamond$ L'égalité du [**a**] donne $\forall i \geqslant 1,\ (2i+1)a_{2i+1} = -2a_{2i-1}$ donc $a_{2i+1} = \dfrac{-2}{2i+1}\, a_{2i-1} = \dfrac{-2}{2i+1} \dfrac{-2}{2i-1} \cdots \dfrac{-2}{3}\, a_1$, par récurrence immédiate. Donc $\forall i \geqslant 0,\ a_{2i+1} = \dfrac{(-2)^i}{(2i+1)\cdot(2i-1)\cdots 3} = (-2)^i \dfrac{(2i)\cdots 2}{(2i+1)\cdot(2i)\cdots 3\cdot 2}$.

Ceci donne $\underline{\forall i \geqslant 0,\ a_{2i+1} = (-4)^i \dfrac{i!}{(2i+1)!}}$.

(c) $\diamond$ De même, $\forall i \geqslant 1,\ (2i)a_{2i} = -2a_{2i-2}$ donc $a_{2i} = \dfrac{-2}{2i} \dfrac{-2}{2}\, a_0$ donc $\underline{\forall i \geqslant 0,\ a_{2i} = \dfrac{(-1)^i}{i!}\, a_0}$.

$\diamond$ Ainsi la sous-suite $\big(a_{2i}\big)_{i \in \mathbb{N}}$ est uniquement définie par la valeur de a_0, tandis que la sous-suite $\big(a_{2i+1}\big)_{i \in \mathbb{N}}$ est connu explicitement donc $\underline{\text{la suite } \big(a_i\big)_{i \in \mathbb{N}} \text{ est uniquement définie par la valeur de } a_0}$.

(d) Les calculs précédents montrent qu'on a, en général, pour une suite vérifiant la relation de récurrence, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i} + a_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-4)^i \frac{i!}{(2i+1)!} x^{2i+1} = a_0\, y_0(x) + a_1\, y_1(x)$. La série entière y_0 est de rayon de convergence $+\infty$: c'est le développement de $x \mapsto e^{-x^2}$. Quant à la série entière y_1, on peut lui appliquer la règle de D'Alembert : $\dfrac{4^i i!}{(2i+1)!} \dfrac{(2i+3)!}{4^{i+1}(i+1)!} = \dfrac{(2i+3)(2i+2)}{4\,(i+1)} = i + \dfrac{3}{2} \xrightarrow[i \to \infty]{} +\infty$ et donc elle est également de rayon de convergence $+\infty$. Comme combinaison linéaire de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, $\underline{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i \text{a pour rayon de convergence } R = +\infty}$.

(e) Ainsi toutes les séries entières vérifiant la relation de récurrence précédente et la condition $a_1 = 1$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E). Comme, d'après le théorème de Cauchy, (E) admet une unique solution vérifiant la condition $y(0) = 0$ et que g et $x \longmapsto \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-4)^i \dfrac{i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}$ sont des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette condition, on a $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-4)^i \dfrac{i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}}$.

5. (a) $\diamond$ On a $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = e^{-x^2} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^i}{i!} x^{2i}}$.

$\diamond$ On a $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t^2} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{i!} t^{2i}$ donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{i!(2i+1)} x^{2i+1}}$.

(b) $\diamond$ En utilisant le fait que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, on obtient le résultat suivant : si, pour $i = 1, 2,\ g_i$ est la somme d'une série entière sur $]-R_i, R_i[$ alors $g_1 g_2$ est somme du produit de ces deux séries sur $]-R, R[$ avec $R = \text{Min}(R_1, R_2)$.

$\diamond$ On a donc,ici, $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ \big(g_1 g_2\big)(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \dfrac{1}{i!(2i+1)} \right) x^{2k+1}}$.

$\diamond$ Or $g = g_1 g_2$ donc, par unicité du développement en série entière, on obtient avec le résultat du [**4.(e)**], $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \dfrac{1}{i!(2i+1)} = (-4)^k \dfrac{k!}{(2k+1)!}$ soit $\dfrac{(-1)^k}{k!} \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{(-1)^i}{2i+1} \dfrac{k!}{(k-i)!i!} = (-4)^k \dfrac{k!}{(2k+1)!}$.

On a donc bien $\underline{\forall k \in \mathbb{N},\quad \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{(-1)^i}{2i+1} \mathrm{C}_k^i = \dfrac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}}$.

* * *
* *
*

Exercice 2

1. Si P est orthogonale, $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|Px\| = \|x\|$ donc $\underline{\text{pour } P \in O(3),\ \mathcal{E}(P) \text{ est la sphère } S(\vec{0}, 1)}$.

2. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ alors $\|Dx\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 x_i^2 = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{x_i^2}{(1/\alpha_i)^2}$ car $\forall i,\ \alpha_i \neq 0$. Donc $\underline{\mathcal{E}(D) \text{ est un ellipsoïde}}$.

3. (i) Soit $B = {}^tAA$, on a ${}^tB = {}^tA\,{}^t({}^tA) = B$ donc B est symétrique et si λ est une valeur propre de B et $x \neq \vec{0}$, un vecteur (colonne) propre associé , on a

$$\lambda \|x\|^2 = \langle x, \lambda\, x\rangle = \langle x, Bx\rangle = {}^txBx == {}^tx\,{}^tAAx = {}^t(Ax)\,Ax = \|Ax\|^2$$

donc $\lambda = \dfrac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} > 0$ car $Ax \neq \vec{0}$ puisque A est inversible donc de noyau réduit à $\{\vec{0}\}$.

Donc $\underline{\text{si } A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ alors } {}^tAA \text{ est une matrice symétrique définie positive}}$.

(ii) B est une matrice symétrique réelle donc $\exists\, Q \in O(3),\ \exists\, \Lambda$ diagonale, $B = Q\,\Lambda\,Q^{-1}$ avec $\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de B. Ces valeurs propres sont strictement positives selon [**(i)**], on peut donc poser $D = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ et on a $\Lambda = D^2$. En posant $P = Q^{-1}$, on a donc :

$\underline{\text{il existe } P \in O(3) \text{ et } D \text{ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que } {}^tAA = {}^tP\,D^2\,P}$.

(iii) ${}^tS = {}^tP\,{}^tD\,P = S$ et S est semblable à D donc a pour valeurs propres les coefficients diagonaux de D qui sont strictement positifs. Donc $\underline{S \text{ est une matrice symétrique définie positive}}$.

(iv) S étant définie positif n'a pas 0 comme valeur propre donc est inversible et on peut poser $Q = A\,S^{-1}$. On a alors ${}^tQQ = {}^t(S^{-1})\,{}^tAA\,S^{-1} = S^{-1}\,{}^tAA\,S^{-1} = {}^tP\,D^{-1}\,P\,{}^tP\,D^2\,P\,{}^tP\,D^{-1}\,P = I$ donc Q est orthogonale. Donc $\underline{\exists Q \in O(3),\ A = QS}$.

(v) Donc $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|Ax\| = \|Sx\|$ et donc $\underline{\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)}$.

(vi) On a aussi $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|{}^tP\,D\,Px\| = \|D\,Px\|$ pusque ${}^tP \in O(3)$. Donc $x \in \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow \|D\,Px\| = 1$ et donc $x \in \mathcal{E}(S)) \Leftrightarrow Px \in \mathcal{E}(D)$. En notant $x' = Px$ et $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, on a $x \in \mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 x_i'^2 = 1$. Or (x_1', x_2', x_3') sont les coordonnées de x dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ soit ${}^tP = P^{-1}$. Donc $\mathcal{E}(A)$ a pour équation dans le repère $(O, \mathcal{B})$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 x_i'^2 = 1$ avec $\forall i,\ \alpha_i > 0$ donc $\underline{\mathcal{E}(A) \text{ est un ellipsoïde}}$.

4. (i) Puisque S est définie positif, $\ker S = \{\vec{0}\}$ car 0 n'est pas valeur propre de S. Pour $v \neq \vec{0}$, on peut donc poser $x = \dfrac{v}{\|S(v)\|}$ et on a $S(x) = \dfrac{S(v)}{\|S(v)\|}$ donc $\|S(x)\| = 1$ c'est à dire $x \in \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$. On a donc aussi $\|S'(x)\| = 1$ soit $\dfrac{\|S'(v)\|}{\|S(v)\|} = 1$ donc $\underline{\|S'(v)\| = \|S(v)\|}$.

(ii) Remarquons tout d'abord que l'égalité ci-dessus est triviale pour $v = \vec{0}$ donc $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ \|S'(v)\| = \|S(v)\|$.

On connaît l'égalité de polarisation $\forall (x,y)\in (\mathbb{R}^3)^2,\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\Big)$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\forall v\in\mathbb{R}^3,\ \forall w\in\mathbb{R}^3,\quad \big\langle S(v),S(w)\big\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\big\|S(v)+S(w)\big\|^2-\big\|S(v)-S(w)\big\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\big\|S(v+w)\big\|^2-\big\|S(v-w)\big\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\big\|S'(v+w)\big\|^2-\big\|S'(v-w)\big\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(\big\|S'(v)+S'(w)\big\|^2-\big\|S'(v)-S'(w)\big\|^2\Big) = \big\langle S'(v),S'(w)\big\rangle\ .\end{aligned}$$

Donc $\underline{\forall v\in\mathbb{R}^3,\ \forall w\in\mathbb{R}^3,\quad \big\langle S(v),S(w)\big\rangle = \big\langle S'(v),S'(w)\big\rangle}$.

(iii) Ceci s'écrit aussi, par symétrie de S et S': $\forall v\in\mathbb{R}^3,\ \forall w\in\mathbb{R}^3,\ \big\langle S^2(v),w\big\rangle = \big\langle S'^2(v),w\big\rangle$ soit $\forall v\in\mathbb{R}^3,\ \forall w\in\mathbb{R}^3,\ \big\langle S^2(v)-S'^2(v),w\big\rangle = 0$. Donc $\forall v\in\mathbb{R}^3,\ S^2(v)-S'^2(v)\in(\mathbb{R}^3)^\perp = \{\vec{0}\}$ autrement dit $\underline{S^2=S'^2}$.

(iv) $\diamond$ Le théorème de décomposition des noyaux s'énonce: si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]$ alors $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ker\big((PQ)(M)\big) = \ker\big(P(M)\big)\oplus\ker\big(Q(M)\big)$.
Or $X-\alpha$ et $X+\alpha$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$ car, α étant une valeur propre de S définie positive, on a $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Donc on a bien $\underline{\ker\big(S^2-\alpha^2I\big)=\ker\big(S+\alpha I\big)\oplus\ker\big(S-\alpha I\big)}$.

$\diamond$ Mais $-\alpha<0$ n'est pas valeur propre de S donc $\ker\big(S+\alpha I\big)=\{\vec{0}\}$ et $\underline{\ker\big(S^2-\alpha^2I\big)=\ker\big(S-\alpha I\big)}$.

(v) On constate que, dans la démonstration ci-dessus, l'hypothèse α valeur propre de S n'a servi que pour montrer $\alpha>0$. On a donc $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \ker\big(S-\alpha I\big)=\ker\big(S^2-\alpha^2 I\big)$.
On en déduit : $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \ker\big(S-\alpha I\big)=\ker\big(S^2-\alpha^2I\big)=\ker\big(S'^2-\alpha^2I\big)=\ker\big(S'-\alpha I\big)$. Donc, pour $\alpha>0$, $\Big(\ker\big(S-\alpha I\big)\neq\{\vec{0}\}\Big)\Leftrightarrow\Big(\ker\big(S'-\alpha I\big)\neq\{\vec{0}\}\Big)$ ce qui montre que S et S' ont les mêmes valeurs propres. Notons $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ les valeurs propres distinctes de S et S' ($1\leqslant p\leqslant 3$). Puisque S et S' sont diagonalisables, on a $\mathbb{R}^3=\bigoplus_{i=1}^{p}\ker\big(S-\alpha_iI\big)$ avec $\ker\big(S-\alpha_iI\big)=\ker\big(S'-\alpha_iI\big)$. Si $x\in\mathbb{R}^3$ se décompose sur cette somme directe sous la forme $x=\sum_{i=1}^p x_i$, on a donc $S(x)=\sum_{i=1}^p S(x_i)=\sum_{i=1}^p\alpha_ix_i=\sum_{i=1}^p S'(x_i)=S'(x)$.
Ceci étant valable pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, on a $\underline{S=S'}$.

5. Si $A=VA'$ avec $V\in O(3)$ alors $\forall x\in\mathbb{R}^3,\ \|Ax\|=\|A'x\|$ donc $\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(A')$.
Réciproquement, pour A inversible, on peut trouver, d'après [**3. (iv)**] $Q\in O(3)$ et S symétrique définie positive telle que $A=QS$ et alors, selon [**3. (v)**], $\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(S)$. De même, il existe $Q'\in O(3)$ et S' symétrique définie positive telle que $A'=Q'S'$ et $\mathcal{E}(A')=\mathcal{E}(S')$. Si $\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(A')$, on a donc $\mathcal{E}(S)=\mathcal{E}(S')$ et donc, suivant [**4. (v)**], $S=S'$ soit $A=QS=QS'=QQ'^{-1}A'$ avec $QQ'^{-1}\in O(3)$.
Donc $\underline{\text{pour } (A,A')\in\big(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\big)^2,\ \text{on a: } \Big(\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(A')\Big)\Longleftrightarrow\Big(\exists\, V\in O(3),\ A=VA'\Big)}$.

* * *
* *
*

Exercice 3

1. (i) $t \mapsto M(t)$ est C^1 sur $[-\pi, \pi]$ et $\forall t \in [-\pi, \pi],\ M'(t) = \begin{pmatrix} -5\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc la tangente à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ est la droite d'équation $\begin{vmatrix} x - 5\cos t & -5\sin t \\ y - 3\sin t & 3\cos t \end{vmatrix} = 0$ soit $\underline{(T_t) : \quad 3\cos t\, x + 5\sin t\, y = 15}$.

(ii) On remarque que $O \notin T_t$ donc, pour tout $P \in T_t$, la droite (OP) existe dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$. Le point P est solution si et seulement si $P \in T_t$ et $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{T_t}$ c'est à dire si et seulement si P est le projeté orthogonal de O sur T_t. D'où l'existence et l'unicité de P .

(iii) À un sommet S de $\mathcal{E}$, la tangente à $\mathcal{E}$ est orthogonale à l'axe (OS). Comme S appartient à cette tangente, si S est un sommet alors $P = S$.

(iv) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ est orthogonal à T_t donc colinéaire à $\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 5\sin t \end{pmatrix}$ donc il existe $\lambda_t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \lambda_t \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 5\sin t \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $P \in T_t$ donc $3\cos t\, X(t) + 5\sin t\, Y(t) = 15$. On obtient $\lambda_t \left(9\cos^2 t + 25\sin^2 t\right) = 15$ soit $\lambda_t = \dfrac{15}{9\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \dfrac{15}{9 + 16\sin^2 t}$. Donc $\underline{\begin{cases} X(t) = \dfrac{45\cos t}{9 + 16\sin^2 t} \\ Y(t) = \dfrac{75\sin t}{9 + 16\sin^2 t} \end{cases}}$

2. (i) On a immédiatement :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$X'(t)$	0	$-$	
$X(t)$	1	$\searrow$	0

(ii) $\diamond$ $\left(t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } Y'(t) = 0\right) \sin t = \frac{3}{4}$ donc $\underline{\exists !\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, Y'(\alpha) = 0 \text{ et on a } \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)}$.

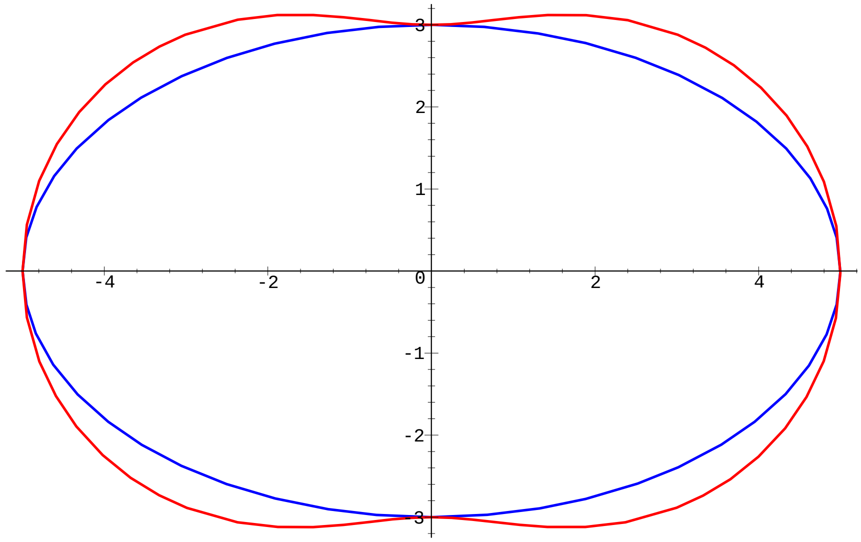
$\diamond$ $\sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ donc $\sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}$ et $\sin^2$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\underline{\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}}$.

$\diamond$ On a $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ et $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ d'où $\underline{\begin{cases} X(\alpha) = \frac{5}{8}\sqrt{7} \\ Y(\alpha) = \frac{25}{8} \end{cases}}$

(iii) On a donc :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$Y'(t)$		$+$	0	$-$	0
$Y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$	3

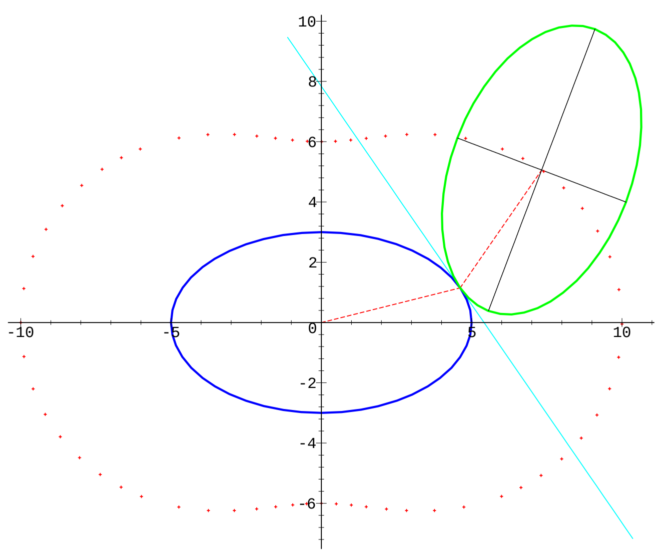
3. On a $\begin{cases} X(t + \pi) = -X(t) \\ Y(t + \pi) = -Y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} X(-t) = X(t) \\ Y(-t) = -Y(t) \end{cases}$ donc il suffit d'étudier l'arc $t \longmapsto P_t$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis de le compléter par une symétrie par rapport à O et une une symétrie orthogonale par rapport à $\left(O, \vec{\imath}\right)$.



4. Question Hors Programme

Notons S le sommet $S = O + \vec{\imath}$ de $\mathcal{E}$. À l'instant $\theta = 0$, il coïncide avec le sommet S' de $\mathcal{E}'$. La condition de roulement sans glissement est qu'à l'instant θ les deux ellipses sont en contact en $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}'$ tels que la longueur de l'arc $\widehat{SM}$ soit égale à celle de l'arc $\widehat{S'M'}$. Si on prend comme paramétrage de $\mathcal{E}'$ celui obtenu par la translation τ, c'est à dire, par exemple, que $S' = M'(\pi)$, on a donc que, si à l'instant θ le contact a lieu en $M(t)$ sur $\mathcal{E}$ alors il a lieu en $M'(\pi - t)$ sur $\mathcal{E}'$. Le point $M(\pi - t)$ étant symétrique du point $M(t)$ pra rapport à $(O, \vec{\jmath})$, l'angle entre les droites $(OM(\pi - t))$ et $T_{\pi-t}$ est l'opposé, modulo π, de l'angle entre les droites $(OM(t))$ et T_t. D'autre part, c'est aussi l'angle entre les droites $(O'M'(\pi - t))$ et $T'_{\pi-t}$. Comme $T_t = T'_{\pi-t}$ à l'instant θ, le droites $(OM(t))$ et $(O'M'(\pi - t))$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à T_t, donc en particulier, O' est, à l'instant θ, le symétrique de O par rapport à T_t. On a donc $\overrightarrow{OO'} = 2\,\overrightarrow{OP}$ et donc <u>le lieu de O' est l'image de $\mathcal{F}$ par l'homothétie de centre O et rapport 2</u> .

<u>illustration</u> :



* * *
* *
*