CORRIGÉ de l'épreuve de MATHS 3 de E3A - 2002 - Filière MP

Autour du commutant d'un endomorphisme

Partie 0. Un exemple.

1. M a pour terme général $m_{i,j} = i\,\delta_{i,j}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de terme général $a_{i,j}$.

$$\begin{aligned}\underline{A \in \mathcal{C}(M)} &\iff A\,M = M\,A \iff \forall\,(i,k) \in [\![1;n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,m_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\,a_{j,k} \\ &\iff \forall\,(i,k) \in [\![1;n]\!]^2,\ \sum_{j=1}^{n} j\,a_{i,j}\,\delta_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} i\,\delta_{i,j}\,a_{j,k} \iff \forall\,(i,k) \in [\![1;n]\!]^2,\ k\,a_{i,k} = i\,a_{i,k} \\ &\iff \forall\,(i,k) \in [\![1;n]\!]^2,\ (i \neq k \Longrightarrow a_{i,k} = 0) \iff \underline{A \text{ est diagonale}}.\end{aligned}$$

2. En notant $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a :

$$A \in \mathcal{C}(M) \iff \exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n \ /\ A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,E_{i,i}.$$

Une base de $\mathcal{C}(M)$ est donc : $(E_{1,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n})$, donc $\underline{\dim \mathcal{C}(M) = n}$.

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

1. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$ et $\underline{x \in E_{\lambda_i}(u)}$. Ainsi $u(x) = \lambda_i.x$.
D'une part, $v\big(u(x)\big) = v(\lambda_i.x) = \lambda_i.v(x)$, d'autre part, $v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big)$.
Donc $u\big(v(x)\big) = \lambda_i.v(x)$, ce qui montre que $\underline{v(x) \in E_{\lambda_i}(u)}$.
Donc tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.

2. On sait d'autre part que chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u, ce qui autorise à considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur $E_{\lambda_i}(u)$. $\underline{u_i \text{ n'est autre que l'homothétie de rapport } \lambda_i \text{ de } E_{\lambda_i}(u)}$.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

- $\underline{\text{Si } v \in \mathcal{C}(u)}$, comme chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v, on sait que $B = Mat(v, \mathcal{B})$ est diagonale par blocs de la forme

$$B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & V_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{C}).$$

- $\underline{\text{Réciproquement}}$, supposons que $B = Mat(v, \mathcal{B})$ soit de la forme $B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & V_p \end{pmatrix}$ avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{C})$.

  $\mathcal{B}$ étant en particulier une base de vecteurs propres de u, alors $A = Mat(u, \mathcal{B})$ est diagonale et on peut la décomposer en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & D_p \end{pmatrix}$ avec $D_i = \lambda_i.I_{n_i}$ (puisque u_i est une homothétie).

  Comme $\forall\,i \in [\![1;p]\!]$, $D_i\,V_i = (\lambda_i.I_{n_i})\,V_i = V_i\,(\lambda_i.I_{n_i}) = V_i\,D_i$, alors $A\,B = B\,A$, donc $u \circ v = v \circ u$, d'où $\underline{v \in \mathcal{C}(u)}$.

4. Par l'isomorphisme $v \longmapsto Mat(v,\mathcal{B})$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on obtient que $\mathcal{C}(v)$ a la même dimension que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ constitué des matrices ayant la forme de B.

Ces matrices dépendent de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(n_i)^2$ coefficients arbitraires, donc peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(n_i)^2$ matrices $E_{j,k}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Donc $\boxed{\dim \mathcal{C}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(n_i)^2.}$

5. Comme $\forall\, i \in [\![1;p]\!]$, $(n_i)^2 \geq n_i$, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i = \dim E = n$ (en effet u étant diagonalisable, n est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres de u).

6. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. L'endomorphisme u de E représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice M de la partie **0** est tel que $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(M) = n$.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

1. Supposons que $u \circ u = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors $\exists\, x \in E \ / \ y = u(x)$. Donc $u(y) = u\big(u(x)\big) = u^2(x) = 0$, d'où $y \in \operatorname{Ker} u$.

Ainsi $\underline{\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u}$. De plus, $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u) \leq \dim(\operatorname{Ker} u) = n - \operatorname{rg} u$, donc $2\operatorname{rg} u \leq n$, d'où $r \leq \dfrac{n}{2}$.

2. On remarque d'abord que puisque G est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, alors $\dim G = n - \dim(\operatorname{Ker} u) = \operatorname{rg} u = r$, donc il est légitime de noter $(e'_1,\ldots,e'_r)$ une base de G

On sait que u induit un isomorphisme $\tilde{u}$ de G sur $\operatorname{Im} u$. Ainsi l'image de la base $(e'_1,\ldots,e'_r)$ de G est une base de $\operatorname{Im} u$.

Redémontrons le théorème d'isomorphisme utilisé ci-dessus. Considérons $\tilde{u} : \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & u(x) \\ G & & \operatorname{Im} u \end{array}$ qui est linéaire.

. $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap G = \{0\}$, donc $\tilde{u}$ est injective.
. $\operatorname{Im} u = u(E) = u(G + \operatorname{Ker} u) = u(G) + u(\operatorname{Ker} u) = u(G) = \tilde{u}(G)$, donc $\tilde{u}$ est surjective, donc bijective.

3. $E = \operatorname{Ker} u \oplus G = \operatorname{Im} u \oplus H \oplus G$. On a donc $\dim(\operatorname{Im} u) = \dim G = r$ et $\dim H = n - 2r = s$.
Soit $(e'_{r+1},\ldots,e'_{r+s})$ une base de H. Considérons la famille $\mathcal{B}' = \big(u(e'_1),\ldots,u(e'_r), e'_{r+1},\ldots,e'_{r+s}, e'_1,\ldots,e'_r\big)$.
Il s'agit d'une base de E adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Im} u \oplus H \oplus G$.

Alors $u(\mathcal{B}') = \big(0,\ldots 0, 0,\ldots,0, u(e'_1),\ldots,u(e'_r)\big)$, donc $Mat(u,\mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \overset{\leftrightarrow}{r} & \overset{\leftrightarrow}{s} & \overset{\leftrightarrow}{r} \end{array} & \end{array}$

4. $v \in \mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v \in \mathcal{C}(u) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_4 \\ 0 & 0 & A_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_7 & A_8 & A_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases}.$

Ainsi $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $Mat(v,\mathcal{B}')$ de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}$.

5. Le nombre de coefficient arbitraires de cette matrice est égal à $r\,n + s\,(s+r) = n\,r + (n-2r)\,(n-r) = n^2 + 2\,r^2 - 2\,r\,n$.
Ainsi $\underline{\dim \mathcal{C}(u) = (n-r)^2 + r^2}$.

En posant $f_n(x) = 2\,x^2 - 2\,n\,x + n^2$, alors $f_n'(x) = 2\,(2\,x - n)$, donc f_n admet un minimum pour $x = \dfrac{n}{2}$ égal à $\dfrac{n^2}{2}$.
Ainsi $\underline{\dim \mathcal{C}(u) \geq \dfrac{n^2}{2}}$.

Partie III. Commutant d'un endomorphisme vérifiant la relation (1).

1. Les polynômes $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X-2)^2$ sont premiers entre eux.
De plus $(P_1 P_2)(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = (u - \mathrm{Id}) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2 = 0$.
Le <u>théorème de décomposition des noyaux</u> donne : $\mathrm{Ker}\,\big((P_1\,P_2)(u)\big) = \mathrm{Ker}\,\big(P_1(u)\big) \oplus \mathrm{Ker}\,\big(P_2(u)\big)$, c'est à dire :
$E = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id})^2 = E_1 \oplus E_2$.
Remarquons tout de suite que E_1 et E_2 étant des noyaux de polynômes en u sont stables par u.

2. La décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$ de $F(X)$ est de la forme : $F(x) = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-2)^2} + \dfrac{c}{X-2}$.
. On multiplie par $X - 1$, puis on remplace X par 1, ce qui donne : $\dfrac{1}{(1-2)^2} = a + b \times 0 + c \times 0$, donc $\underline{a = 1}$.
. On multiplie par $(X-2)^2$, puis on remplace X par 2, ce qui donne : $\dfrac{1}{2-1} = a \times 0 + b + c \times 0$, donc $\underline{b = 1}$.
. Pour $X := 0$, on trouve que $\underline{c = -1}$.
Donc $F(X) = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-2)^2} - \dfrac{1}{X-2} = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{3-X}{(X-2)^2}$.
Ainsi $1 = \underline{(X-1)\,(X-2)^2\,F(X) = (X-2)^2 + (X-1)\,(3-X)}$, donc $\boxed{V(X) = 1 \text{ et } U(X) = 3 - X.}$

3. On en déduit que : $\mathrm{Id} = U(u) \circ (u - \mathrm{Id}) + V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
Donc $\forall\, x \in E,\ x = \big[U(u) \circ (u - \mathrm{Id})\big](x) + \big[V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2\big](x)$.
Posons $x_1 = \big[V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2\big](x)$ et $x_2 = \big[U(u) \circ (u - \mathrm{Id})\big](x)$. Ainsi $\underline{x = x_1 + x_2}$.
Vérifions par exemple que $x_1 \in E_1 = \mathrm{Ker}\,\big(P_1(u)\big) = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$. On rappelle que des polynômes en u commutent.
On a : $(u - \mathrm{Id})(x_1) = \big[(u - \mathrm{Id}) \circ V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2\big](x) = V(u)\Big(\big((u - \mathrm{Id}) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2\big)(x)\Big) = V(u)(0) = 0$.
On montre de même que $x_2 \in E_2$.
On a donc décomposé x en $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On en déduit que $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$.
Ainsi $\forall\, x \in E,\ p_1(x) = \big[V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2\big](x)$, donc $\underline{p_1 = V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2 = (u - 2\,\mathrm{Id})^2 = u^2 - 4\,u + 4\,\mathrm{Id}}$.
De même $\underline{p_2 = U(u) \circ (u - \mathrm{Id}) = (3\,\mathrm{Id} - u) \circ (u - \mathrm{Id}) = -u^2 + 4\,u - 3\,\mathrm{Id}}$.
L'intérêt de ces égalités est que p_1 et p_2 s'expriment comme des polynômes en u.

4. Montrons que $d = p_1 + 2\,p_2$ est diagonalisable.
<u>Solution matricielle</u> Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$; $Mat(d, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 2\,I_{n_2} \end{pmatrix}$ ce qui montre que $d = p_1 + 2\,p_2$ est diagonalisable.
<u>Autre solution</u> p_1 et p_2 sont des projecteurs associés, donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.
On a : $\mathrm{Id} = p_1 + p_2$, $d = p_1 + 2\,p_2$ et $d^2 = p_1^2 + 2\,p_1 \circ p_2 + 2\,p_2 \circ p_1 + 4\,p_2^2 = p_1 + 4\,p_2$.
On tire $p_1 = 2\,d - d^2$ et $p_2 = \dfrac{d^2 - d}{2}$, donc $\mathrm{Id} = p_1 + p_2 = -\dfrac{d^2}{2} + \dfrac{3\,d}{2}$, d'où $d^2 - 3\,d + 2\,\mathrm{Id} = 0$.
Ainsi d annule le polynôme $X^2 - 3\,X + 2 = (X-1)\,(X-2)$ scindé à racines simples, donc d est diagonalisable.

5. $w = u - d$ avec $d = p_1 + 2\,p_2 = (u^2 - 4\,u + 4\,\mathrm{Id}) + 2\,(-u^2 + 4\,u - 3\,\mathrm{Id}) = -u^2 + 4\,u - 2\,\mathrm{Id}$.
Donc $w = u^2 - 3\,u + 2\,\mathrm{Id} = \underline{(u - \mathrm{Id}) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})}$.
On en déduit que $w^2 = (u - \mathrm{Id}) \circ (u - \mathrm{Id}) \circ (u - 2\,\mathrm{Id})^2 = (u - \mathrm{Id}) \circ 0 = 0$.
Ainsi, ou bien $w = 0$, ou bien $w \neq 0$ et $w^2 = 0$, c'est à dire w est nilpotent d'indice 2.

6. Détermination de $\mathcal{C}(u)$.

(a) $*$ Si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors v commute avec tout polynôme en u, donc en particuler avec $d = -u^2+4\,u-2\,\mathrm{Id}$ et $w = u^2-3\,u+2\,\mathrm{Id}$.
$*$ Si v commute avec d et avec w, alors v commute avec $u = d + w$.
Ainsi : $\underline{v \in \mathcal{C}(u) \iff v \in \mathcal{C}(d) \text{ et } v \in \mathcal{C}(w)}$.

(b) w est un polynôme en u, donc $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id})$ sont stables par w.
De plus $w = (u - 2\,\mathrm{Id}) \circ (u - \mathrm{Id})$, d'où $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\,w$, donc la restriction de w à E_1 est nulle.
En outre, $\forall\, x \in E_2 = \mathrm{Ker}\,(u^2-4\,u+4\,\mathrm{Id})$, $w(x) = (u^2-3\,u+2\,\mathrm{Id})(x) = (u^2-4\,u+4\,\mathrm{Id})(x)+(u-2\,\mathrm{Id})(x) = (u-2\,\mathrm{Id})(x)$, donc $\underline{w \text{ et } u - 2\,\mathrm{Id}) \text{ coïncident sur } E_2}$.
En se plaçant sur une base $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup B_2''$ adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, alors w admet dans cette base une représentation matricielle diagonale par blocs de la forme $W = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{n_1}{\leftrightarrow} & \underset{n_2}{\leftrightarrow} \end{array} \end{array}$ où l'on sait que N est la matrice dans la base $\mathcal{B}_2$ de l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par w, donc aussi par $u - 2\,\mathrm{Id}$.
Puisque $u = d + w$, il en résulte que $Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} + N \end{pmatrix}$.
<u>Remarque</u> : puisque $w^2 = 0$, on a $\underline{N^2 = 0}$.

(c) On a $\mathrm{Ker}\,w_2 = E_2 \cap \mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id})$ car $\mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id})^2 = E_2$.
Donc $\mathrm{rg}\,N = \mathrm{rg}\,w_2 = \dim E_2 - \dim\,(\mathrm{Ker}\,w_2) = n_2 - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id})\big)$.

(d) $*$ Si v commute avec u, alors v stabilise $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id})$, alors $Mat(v, \mathcal{B})$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$. En traduisant que $Mat(u, \mathcal{B})$ et $Mat(v, \mathcal{B})$ commutent, on trouve que $\underline{V_2\,N = N\,V_2}$.
$*$ Réciproquement si $Mat(u, \mathcal{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ avec $V_2\,N = N\,V_2$, on constate immédiatement que $Mat(u, \mathcal{B})$ et $Mat(v, \mathcal{B})$ commutent, donc u et v commutent, d'où $v \in \mathcal{C}(u)$.

(e) $*$ <u>Si u est diagonalisable</u>, alors $u - 2\,\mathrm{I}d$ l'est aussi et on sait l'endomorphisme w_2 induit sur E_2 par $u - 2\,\mathrm{I}d$ est diagonalisable. Donc $N = Mat(w_2, \mathcal{B}_2)$ est diagonalisable. Or N est nilpotente, donc ses valeurs propres sont toutes nulles (car si $NX = \lambda.X$ et $X \neq 0$, alors $0 = N^2.X = \lambda^2.X$, donc $\lambda = 0$).
Ainsi N est semblable à la matrice diagonale nulle, donc $\underline{N = 0}$.
$*$ <u>Si $N = 0$</u>, alors $w = 0$, donc <u>$u = d$ est diagonalisable</u>.

(f) On suppose u non diagonalisable, donc $N \neq 0$, donc N est nilpotente d'indice égal à 2.
Posons $p = \dim\big(\mathrm{Ker}\,(u - 2\,\mathrm{Id})\big)$. Ainsi le rang de N est $r_2 = n_2 - p$.
Puisque N est nilpotente d'indice 2, d'après le **II.5**, le commutant de N a pour dimension $(n_2-r_2)^2+r_2^2 = p^2+(n_2-p)^2$.

De la caractérisation obtenue au (d), on déduit que $\underline{\dim \mathcal{C}(u) = n_1^2 + p^2 + (n_2 - p)^2}$.

Fin du corrigé