L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

À propos des zéros des fonctions de Bessel d'indice entier

Définitions et notations

Si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et φ, ψ deux fonctions réelles définies et continues sur I, on note $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$ l'équation différentielle

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0 \qquad (\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$$

Si φ est la fonction nulle, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$se notera simplement $(\mathcal{E}_{\psi})$

Les solutions des équations différentielles sont à valeurs réelles

Si u est solution sur I d'une équation différentielle, un élément t_0 de l'intervalle I est dit zéro de u si $u\left(t_0\right) = 0$

$1^{\text{ère}}$ partie

Étude de solutions des équations différentielles de Bessel d'indice entier

Dans cette partie, n désigne un entier naturel. On note $(\mathscr{B}_n)$ l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \qquad (\mathscr{B}_n)$$

On note également σ_n la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, par : $\sigma_n(t) = 1 + \dfrac{1 - 4n^2}{4t^2}$

1.1. Soit u une solution, non identiquement nulle, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathscr{B}_n)$. On note v la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par :

$$\forall t > 0, \quad v(t) = \sqrt{t}\, u(t)$$

Montrer que la fonction v est une solution, non identiquement nulle, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\sigma_n})$.

1.2 Si $\sum\limits_{k \geqslant 0} a_k z^k$ est une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$, on pose

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{n+k}, \quad t \in \left]-R, R\right[$$

et on suppose que y_n est solution, sur l'intervalle $]-R, R[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{B}_n)$.

1.2.1. Montrer que $a_1 = 0$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad (k+2)(2n+k+2)\, a_{k+2} + a_k = 0$.

1.2.2. En déduire que, pour tout entier naturel k, $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = a_0 n! \dfrac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!}$.

1.3. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{1}{k!\,(n+k)!} z^k$ et $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!} z^{2k}$

1.4. Justifier que la fonction de Bessel d'indice n, notée J_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!\,(n+k)!} t^{2k}$$

est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\mathscr{B}_n$.

Dans la suite du problème, on note G_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,(n+k)!} t^k$$

1.5. Une première localisation des zéros de J_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$

1.5.1. Préciser $G_n(0)$ et montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $G_n(t) > 0$, pour tout $t \in]-\beta, \beta[$

1.5.2. Montrer que les zéros de la fonction G_n sont dans l'intervalle $]-\infty, -\beta]$

1.5.3 Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n G_n\left(-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)$ puis en déduire que les zéros de la fonction J_n, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, sont dans l'intervalle $\left[2\sqrt{\beta}, +\infty\right[$

2ème partie
Quelques résultats utiles pour la suite

2.1. Quelques propriétés de la fonction G_n

2.1.1. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer sa dérivée p-ième $G_n^{(p)}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$, comme somme d'une série

2.1.2. Montrer soigneusement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x t^n G_n(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1} G_n'(x)$

2.1.3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^{n+p} G_n'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \longmapsto x^{n+p-1}\left(G_n(x) + (p-1) G_n'(x)\right)$$

2.1.4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes A_p et B_p à coefficients entiers, de degrés respectifs $p-1$ et p si $p \geqslant 1$, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t^{n+p} G_n(t)\,\mathrm{d}t = x^{n+1}\left(A_p(x) G_n(x) + B_p(x) G_n'(x)\right) \tag{1}$$

On pourra raisonner par récurrence et exprimer A_{p+1} et B_{p+1} en fonction de A_p et B_p respectivement

2.1.5. Préciser les valeurs de $A_p(0)$ et $B_p(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

2.1.6. Soit $x \in \mathbb{R}$ un zéro de la fonction G_n ; montrer que $G_n'(x) \neq 0$.
*On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la formule (**1**) et le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass.*

2.2. Théorème de relévement :
Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

2.2.1. Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et telles que $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{g'}{g}$.
Montrer que f et g sont proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $g = \lambda f$

2.2.2. Soit $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que, pour tout $t \in I$, $|h(t)| = 1$.
Si $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont tels que $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, montrer que la fonction θ définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad \theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{h'(s)}{h(s)}\,\mathrm{d}s$$

est à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie $h(t) = e^{i\theta(t)}$, pour tout $t \in I$.

2.2.3. Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$

(i) Montrer que la fonction $g: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto |f(t)|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

(ii) Soient $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f(t_0) = |f(t_0)| e^{i\theta_0}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\theta: I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in I, \quad f(t) = |f(t)| e^{i\theta(t)}$$

2.3. Formule d'intégration par parties itérée

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit p un eniter naturel non nul. On considère deux fonctions numériques $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p. Montrer que

$$\int_a^b f^{(p)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^p \int_a^b f(t)g^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \left(f^{(n-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - f^{(n-k)}(a)g^{(k-1)}(a) \right)$$

3^{ème} partie

Étude des zéros des solutons d'une équation différentielle d'ordre 2

Soient I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et φ, ψ deux fonctions réelles définies et continues sur I ; on rappelle que $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$ et $(\mathcal{E}_\psi)$ désignent respectivement les équations différentielles

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0 \quad \text{et} \quad y'' + \psi y = 0$$

3.1. Justifier que, pour tout $t_0 \in I$ et tout couple (x_0, x_0') de réels, il existe une unique solution u de $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$, définie sur I, telle que $u(t_0) = x_0$ et $u'(t_0) = x_0'$.
On notera Z_w l'ensemble des zéros sur I d'une solution w de $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$: $Z_w = \{s \in I \ , \ w(s) = 0\}$

3.2. Premières propriétés des zéros d'une solution de $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$

Soit u une solution sur I, non identiquement nulle, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\varphi,\psi})$

3.2.1. Montrer que si $t_0 \in I$ est un zéro de u alors $u'(t_0) \neq 0$ et il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\setminus \{t_0\}, \quad u(t) \neq 0$$

3.2.2. Soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Montrer que l'ensemble $Z_u \cap [a,b]$ est fini.
On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass

3.3. Étude des zéros d'une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\psi)$

Dans cette question, on suppose que $I = [\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et que la fonction ψ est à valeurs strictement positives sur I

On considère une solution u sur I, non identiquement nulle, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\psi)$ et on lui associe les deux fonctions $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\rho: I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = u(t) + iu'(t) \quad \text{et} \quad \rho(t) = \sqrt{u^2(t) + u'^2(t)}$$

3.3.1. Montrer que pour tout $t \in I, \quad \rho(t) > 0$

3.3.2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et montrer qu'il existe une fonction $\theta: I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que

$$\forall t \in I, \quad u(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \quad \text{et} \quad u'(t) = \rho(t)\sin(\theta(t))$$

3.3.3. Exprimer la dérivée θ' de θ en fonction de u, u' et ψ et en déduire que la fonction θ est strictement décroissante sur I

3.3.4. On suppose de plus que la fonction ψ est minorée sur I par une constante $\lambda > 0$

(i) Montrer que, pour tout $t \in I$, $\theta'(t) \leqslant -\min(1, \lambda)$.
On pourra utiliser le fait que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \ \min(1,\lambda) \leqslant \dfrac{x^2 + \lambda y^2}{x^2 + y^2}$

(ii) En déduire que la fonction θ réalise une bijection de I sur l'intervalle $]-\infty, \theta(\alpha)]$

(iii) Montrer alors que les zéros de la solution u sur I forment une suite strictement croissante vers $+\infty$; plus précisement, $Z_u = \left\{\theta^{-1}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{\pi}{2}+k\pi \leqslant \theta(\alpha)\right\}$

3.4. Dans cette question, on suppose $I = [\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et qu'il existe $\gamma > \alpha$ tel que la fonction ψ soit à valeurs strictement positives et minorée par $\lambda > 0$ sur l'intervalle $[\gamma, +\infty[$. On considère une solution u sur I, non identiquement nulle, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\psi)$.

Montrer que les zéros de la solution u sur I forment une suite qui tend vers $+\infty$ et qui est strictement croissante à partir d'un certain rang.

3.5. Application aux zéros des fonctions de Bessel

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les zéros de la fonction J_n de Bessel, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, forment une suite qui tend vers $+\infty$ et qui est strictement croissante à partir d'un certain rang

4ème partie
Irrationnalité des zéros de la fonction J_n de Bessel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et J_n, G_n les fonctions définies dans la première partie.
Pour tout entier naturel p, on note U_p, L_p et T_p les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U_p(x) = \frac{x^{n+p}(1-x)^p}{p!}, L_p(x) = U_p^{(p)}(x) \quad \text{et} \quad T_p(x) = \int_0^1 G_n(xt)L_p(t)\,\mathrm{d}t$$

4.1. Montrer que pour tout entier naturel p, il existe deux polynômes Q_p et R_p à coefficients entiers, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad T_p(x) = \dfrac{Q_p(x)G_n(x) + R_p(x)G_n'(x)}{x^p}$;

(ii) $Q_0 = 0$, $R_0 = 1$ et $Q_p(0)R_p(0) \neq 0$ si $p \geqslant 1$;

(iii) si $p \geqslant 1$, le degré de Q_p (resp. R_p) est inférieur ou égal à $p-1$ (resp. p)

On pourra commencer par exprimer d'abord le polynôme $U_p^{(p)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et ensuite utiliser la question **(2.1.4)** *de la deuxième partie.*

4.2. Montrer que pour tout entier naturel p et tout réel non nul x,

$$(-1)^p x^p \int_0^1 G_n^{(p)}(xt)U_p(t)\,\mathrm{d}t = T_p(x)$$

4.3. Montrer soigneusement que pour tout réel x et tout entier naturel p,

$$\left|\int_0^1 G_n^{(p)}(xt)U_p(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{e^{|x|}}{p!}$$

4.4. Montrer que pour tout réel x, la suite $\left(Q_p(x)G_n(x) + R_p(x)G_n'(x)\right)_{p\geqslant 1}$ converge vers 0

4.5. Montrer que, pour tout entier naturel p, le polynôme $Q_{p-1}R_p - Q_pR_{p-1}$ est en fait un monôme de degré $2(p-1)$

4.6. Montrer que pour tout entier non nul p et tout réel non nul x, $(T_{p-1}(x), T_p(x)) \neq (0,0)$

4.7. Montrer que les zéros de la fonction G_n sont irrationnels.

4.8. Montrer que si x est un zéro non nul de la fonction J_n, alors x et x^2 sont irrationnels.

FIN DE L'ÉPREUVE