CONCOURS MARROCAIN 2005 MATHS II .
corrigé de Brahim Benmimoun (MP MEKNES).

I)PRÉLIMINAIRES
1 Remarque : si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $D_{f_\alpha} = \mathbb{R}$.

1.1 f_α `est de classe` $C^1 sur]-1,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-1,+\infty[; (1+x)f_\alpha^{'}(x) - \alpha f_\alpha(x) = 0.$$

1.2 Puisque $R > 0$: S_a est de classe C^∞ sur $]-\mathbb{R},\mathbb{R}[$.

1.2.a Si $x \in]-r,r[$ où $r = min(1,\mathbb{R})$, par injection dans l' équation (1) on trouve :
S_a est solution de (1) ssi $\forall k \in \mathbb{N}; (k+1)a_{k+1} = (\alpha - k)a_k$.

1.2.b Une reccurence immédiate donne :

$$a_k = \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!} a_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.2.c `si` $\alpha \in \mathbb{N}$ `il est clair que` S_a `est un polynôme donc le rayon est infini.`
Si $\alpha \in \mathbb{N}$ par le critère d'Alembert le rayon de convergence est 1.
Si $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{N}$ on a f_α est solution du problème de Cauchy :

$$y(o) = 1, (1+x)y' - \alpha y \texttt{sur l'ouvert}]-1,+\infty[.$$

D'aprés le théorème de Cauchy - Lipschitz la somme de la serie entière S_a qui verifie $S_a(0) = 1$ coincide avec f_α sur $]-1,1[$.
Si $\alpha \in \mathbb{N}$ S_a coincide avec f_α même sur $]-\infty,+\infty[$.

1.3 $f_{\frac{1}{2}}(x) = \displaystyle\sum_0^{+\infty} b_k x^k$ en utilisant le produit de Cauchy :

$(f_{\frac{1}{2}})^2(x) = 1 + x \Longleftrightarrow \forall q \geqslant 2; \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k b_{q-k}, b_0 = 1.$
2

2.1 $u^{p-1} \neq 0$ d'où l'existance de x_0 verifiant $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

2.2 Soient $(\alpha_0, ..., \alpha_{p-1})$ des réels vérifiant : $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0$ si on suppose $(\alpha_0, ..., \alpha_{p-1}) \neq (0, ..., 0)$ soit $j = \{i/\alpha_i \neq 0$ alors $\displaystyle\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0$ d'où en compossant par u^{p-1-j} on trouve : $\alpha_j u^{p-1}(x_0) = 0$ de sorte que $\alpha_j = 0$ d'où une contradiction.

2.3 $(x_0, ..., u^{p-1}(x_0))$ une famille libre de cardinal p d'un espace vectoriel de dimension n, on en deduit que $p \leq n$ comme $u^p = 0$ alors $u^n = u^{n-p}u^p = 0$.

2.4 X^p est un polynôme unitaire annulateur de u donc Π^u divise X^p de sorte que Π^u est de la forme X^j où $j \leqslant p$.
si $j < p$ alors l'expression $u^j = 0$ menerait à une contradiction en conclusion : $\Pi_u = X^p$.

II ETUDE D' ÉQUATIONS DU TYPE $X^2 = A$ DANS $M_n(\mathbb{R})$

A. un exemple

1. on vérifie facilement que $sp(A) = 1, 2, 3$ et donc A admet trois valeurs propres distinctes de sorte que $A \in M_3(\mathbb{R})$ admet est diagonalisable.

2. on note $1 = \lambda_1, 2 = \lambda_2, 3 = \lambda_3$ on vérifie que $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. e_1, e_2, e_3 sont des vecteurs propres associés réspectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui sont distinctes donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R^3}$ on note $B = (e_1, e_2, e_3)$.

$$D = Mat(u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4.
4.1 Facilement $v^2 = u, uv = vu$.

4.2 $uv(e_i) = \lambda_i v(e_i) \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ainsi $v(e_i) \in Ker(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}}) = Ved(e_i)$ d'où $v(e_i)$ est colineaire à e_i on note $v(e_i) = \alpha_i e_i$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$

4.3 $Mat(v, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$
$v^2 = u$ on trouve $\alpha_i^2 = \lambda_i$ de sorte que $\alpha_i \in \{-\lambda_i, \lambda_i\}$.

5. on trouve huit solutions de la forme $X = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\alpha_i \in \{-\lambda_i, \lambda_i\}$.

B. Quelques résultats généraux
1.
1.1 $v^2 p = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1}$

on a v est nilpotent d'idice noté $q \in 2p-1, 2p$ or $q \leqslant n$ d'où $2p-1 \leqslant q \leqslant n$ de sorte que $p \leqslant \frac{n+1}{2}$.

1.2 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotent d'indice $p=2$ qui ne vérifie pas $2 \leqslant \frac{2+1}{3}$ D'où le résultat.

2. Par un calcul facile $\omega^2 = (\sum_{i=0}^{n-1} b_i u^i)(\sum_{j=0}^{n-1} b_j u^j) = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1} b_i b_j u^{i+j} = \sum_{q=0}^{2n-1} (\sum_{i=0}^{q} b_i b_{q-j}) u^q$

$= \sum_{q=0}^{p-1} (\sum_{i=0}^{q} b_i b_{q-j}) u^q = b_0^2 I_E + 2b_o b_1 u = I_E + u$.

3.1 D'après 1.2 on a $(x_1, ..., u^{n-1}(x_1))$ est libre ayant n éléments donc base de E et par suite $g(x)$ s'écrit $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_1)$.

3.2 $gu = g(g^2 - I) = (g^2 - I)g = ug; B = (x_1, ..., u^{n-1}(x_1))$ est une base de E on vérifie facilement que $\forall j \in \{0, 1, ..., n-1\} g(u^j(x_1)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(u^j(x_1))$ d'où le résultat.

3.3 $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i = 0$ on applique à x_1 on trouve alors le résultat.

$I_E + u = (\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i)^2 = \sum_{q=0}^{n-1} (\sum_{i=0}^{q} \alpha_i \alpha_{q-i}) u^2$

puisque $(I_E, u_1, ..., u_{n-1})$ est libre on trouve alors le résultat.

3.4 $\alpha_0^2 = 1 = b_0^2$ soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\alpha_0 = \epsilon b_0$ on note par une reccurence finie simple que $\alpha_i = \epsilon b_i, \forall i \in \{0, ..., n-1\}$ ainsi $g = -\omega$ ou $g = \omega$.

4. Application

on note $M = I + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En considérant l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ associé à J ; qui est nilpotent d'indice 4

d'après l'étude précedente on trouve $X^2 = M \Longleftrightarrow X = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i J^i$ ou $X = -\sum_{i=0}^{3} b_i J^i$.

5.1 $\nu d = d\nu$ d'où $(d - \lambda I_E)\nu = \nu(d - \lambda I_E)$ d'où $E_k = Ker(d - \lambda I_E)$ est stable par ν

Si p l'indice de nilpotente de ν alors $\nu_\lambda^p = 0$ d'où ν_λ est nilpotent on note son indice $p_\lambda (p_\lambda \leqslant p)$.

5.2 Soit $\lambda \in S_p(d)$

Soit $x_0 \in E_\lambda$ tel que :$\nu^{p_\lambda - 1}(x_0) \neq 0$ alors $d(\nu^{p_\lambda - 1}(x_0)) = u(\nu^{p_\lambda - 1}(x_0)) = \lambda \nu^{p_\lambda - 1}(x_0))$

et comme $\nu^{p_\lambda - 1}(x_0) \in E_\lambda$ alors λ est une valeur propre de d

On a $sp(d) \subset sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc 0 n'est pas une valeur propre de d et par suite d est inversible.

5.3

d étant diagonalisable donc : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$ avec $\lambda_1, ...\lambda_r$ les valeurs propres distincts de d.

Si $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$ alors $d(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$.

5.4

Si δ endomorphisme de E vérifiant $\delta^2 = d$ et $\nu\delta = \delta\nu$ alors δ laisse stable les espaces propres de d et $\delta^2/_{E_{\lambda_i}} = \lambda_i I_{E_{\lambda_i}}$.
Il suffit de prendre $\delta/_{E_{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i} I_{E_{\lambda_i}}$.
Soit alors δ endomorphisme de E définit par :
Si $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$ alors $\delta(x) = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} x_i$.
On vérifie facilement que : $\delta^2 = d$ et $\nu\delta = \delta\nu$.

5.5

$det(\delta^2) = (det\delta)^2 = det(d) \neq 0$ donc $det(\delta) \neq 0$ et par suite δ est inversible.
On a : $\nu\delta^{-2} = \nu(\delta^2)^{-1} = \nu d^{-1}$ or $\nu d = d\nu$ et donc $d^{-1}\nu = \nu d^{-1}$.
Ainsi $\nu\delta^{-2} = \delta^{-2}\nu$ et par suite $(\nu\delta^{-2})^n = (\nu)^n(\delta^{-2})^n = 0$.
D'où $\nu\delta^{-2}$ est nilpotent.

5.6

D'après II B , si on note $u_1 = \nu\delta^{-2}$ et $w = \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_1^i$.
Alors u_1 est nilpotent et on a $w^2 = I_E + u_1$
Ainsi $w^2\delta^2 = \delta^2 + \nu = d + \nu = u$.
Soit $v = w\delta$ alors :

$$w\delta = \sum_{i=1}^{n-1} b_i(\nu\delta^{-2})^i\delta =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i\delta(\nu\delta^{-2})^i = \delta \sum_{i=1}^{n-1} b_i(\nu\delta^{-2})^i = \delta w.$$

Ainsi $v^2 = (w\delta)^2 = w^2\delta^2 = u$
Enfin il suffit de noter $P = \sum_{i=1}^{n-1} b_i X^i$ on a bien $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

III. RACINE CARRÉE D'UNE MATRICE SYMÉTRIQUE POSITIVE.
1.
Notons $N = {}^tMM$ alors : ${}^tN = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = N$ d'où N est symétrique .
Soit $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ on a :

$${}^tXNX = {}^t(MX)(MX) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \geqslant 0 \text{ où MX} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}.$$

D'où N est symétrique positive ,on a le même conclusion si M est symétrique.

2.1
A étant réelle symétrique soit donc P matrice orthogonale telle que : $PA^tP = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$.
où les λ_i sont les valeur propres de A.
[$\Rightarrow$]
Supposons que A est positive , soit λ une valeur propre et $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que :

$$AX = \lambda X.$$

On a :
$0 \leqslant {}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$ où $\|\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et donc λ est positive.
[$\Leftarrow$]
A étant réelle symétrique soit donc P matrice orthogonale telle que :

$$PA^tP = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n).$$

où les λ_i sont les valeur propres de A ,on note ensuite $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$.

$$\text{Si } X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R}); {}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 \geqslant 0 \text{ avec } PX = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi A est positive . 2.2
Même raisonnement en remplaçant les inégalités larges par les inégalités strictes .
3.1
A étant réelle symétrique soit donc P matrice orthogonale telle que : $PA^tP = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ matrice qu'on note D.
où les λ_i sont les valeur propres de A qui sont positves car A est symétrique positive
Soit $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, .., \sqrt{\lambda_n})$ on à alors :

$$A = {}^tPDP = {}^tP\Delta\Delta P = ({}^tP\Delta P)({}^tP\Delta P) = B^2 \text{ où } B = {}^tP\Delta P.$$

Il est clair que B est symétrique, positive car ses valeur propres sont les $\sqrt{\lambda_i}$ positives d'où le résultat .
Si $A \in S_n^{++}$ alors $B \in S_n^{++}$ puisque les $\sqrt{\lambda_i}$ seront strictements positives.

3.2
(a) f et g commutent donc tout espace propre de f est stable par g
(b) g est un endomorphisme autoadjont donc diagonalisable et par suite g_λ est aussi diagonalisable .
Considérons $\alpha \in Sp(g_\lambda) \subset Sp(g) \subset \mathbb{R}^+$, alors $\alpha^2 \in Sp(g_\lambda^2)$.
Or $f = g^2$ donc $\lambda I_{E_\lambda(f)} = g_\lambda^2$ et par suite $\alpha^2 = \lambda$,ainsi $\alpha = \sqrt{\lambda}$.
En conclusion $Sp(g_\lambda) = \{\sqrt{\lambda}\}$ et donc $g_\lambda = \sqrt{\lambda} E_\lambda(f)$.
(c) f est un endomorphisme autoadjont donc diagonalisable et par suite $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$.

Si $x = \sum\limits_{\lambda \in Sp(f)} x_\lambda$ alors : $g(x) = \sum\limits_{\lambda \in Sp(f)} \sqrt{\lambda} x_\lambda$
Ainsi g est complétement detérminé ;de plus $B = Mat(g, B_c)$ où B_c est la base canonique de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'où i'unicité de B.

3.3
Soit B_1 une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$ alors :
$A = PDP^{-1}$ et $\sqrt{A} = PD_1P^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $D_1 = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n})$
(où les λ_i sont les valeurs propres de A et P la matrice de passage de B_c à B_1).
Notons R le polynôme d'interpolation da lagrange associé aux suites :
$(\mu_1, \mu_1, ..., \mu_r), (\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, ..., \sqrt{\mu_r})$ avec $Sp(A) = \{\mu_1, \mu_1, ..., \mu_r\}$.
Alors $R(D) = D_1$ et par suite $R(A) = R(PDP^{-1}) = PR(D)P^{-1} = PD_1P^{-1} = \sqrt{A}$, d'où le résultat .

4.1
$A \in S_n^+$ donc $\sqrt{A} \in S_n^+$.
On a : $A = {}^t(\sqrt{A}C\sqrt{A}) = {}^t(\sqrt{A})^t(C)^t(\sqrt{A}) = \sqrt{A}\sqrt{C}\sqrt{A}$.
D'autre part : Si $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ on a : ${}^tX\sqrt{A}C\sqrt{A}X = {}^t(\sqrt{A}X)C\sqrt{A}X = {}^tYCY \geqslant 0$
où $Y = \sqrt{A}X$ ainsi $\sqrt{A}C\sqrt{A}$ est symétrique positive et par suite :

$$0 \leqslant \sum_{\lambda \in Sp(\sqrt{A}C\sqrt{A})} \lambda = Tr(\sqrt{A}C\sqrt{A}) = Tr(\sqrt{A}\sqrt{A}C) = Tr(AC).$$

4.2
Puisque A est définie positive il en est de même de $\sqrt{A}$ et donc $\sqrt{A}$ est inversible ,notons $S = \sqrt{A}C\sqrt{A}$ qui est symétrique rèelle donc diagonalisable ainsi AC est diagonalisable car $\sqrt{A}S(\sqrt{A})^{-1} = AC$.

5.1
AB est symétrique en effet : ${}^t(AB) = {}^t(BA) = {}^tA^tB = AB$.
Soit P et Q deux polynômes tels que : $\sqrt{A} = P(A)$ et $\sqrt{B} = Q(B)$.
Puisque A et B commutent il en est de même de A et $Q(B)$ et par suite $P(A)$ et $Q(B)$ commutent , d'où le résultat .

5.2
$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{B} = (\sqrt{A})^2(\sqrt{B})^2 = AB$.
Or $\sqrt{A}$ et $\sqrt{B}$ sont symétriques et commutent donc $\sqrt{A}\sqrt{B}$ est symétrique et par suite $AB = (\sqrt{A}\sqrt{B})^2$ est symétrique positive (cf : question III.1)

5.3

On a $\sqrt{A}$ et $\sqrt{B}$ sont deux éléments de S_n^+ qui commutent donc d'après III.5.1 et III. 5.2 : $\sqrt{A}\sqrt{B}$ est un élément de S_n^+.
Comme $\sqrt{A}\sqrt{B} \in S_n^+$ et $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = AB$ alors d'après III.3 : $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

6.1
Soit $(M_n)_n$ une suite à éléments dans S_n^+ qui converge vers une matrice M de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${}^tM_n = M_n$ et ${}^tXM_nX \geqslant 0$.
En tendant n vers l'infini et en utilisant la continuité des endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définis par : $A \mapsto {}^tXAX$, $A \mapsto {}^tA$ on trouve :

$${}^tM = M, {}^tXMX \geqslant 0.$$

Ainsi S_n^+ est un fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$
Autre façon : considérons l' endomorphisme$f$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :$A \mapsto {}^tA - A$ qui est évidement continu , par suite $S_n = f^{-1}\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
D'autre part pour $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ notons g_X l'application de S_n dans $\mathbb{R}$ définie par : $A \mapsto {}^tXAX$, g_X est continue et Comme $S_n^+ = \displaystyle\bigcap_{X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})} g_X^{-1}[0, +\infty[$ alors S_n^+ est un fermé S_n (comme interssection de fermés deS_n)et par suite fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

6.2
Notons $\varphi : X \mapsto X^2$ l'application de S_n^+ dans lui même il est clair que φ est continue et $\varphi \circ \Phi = I_{S_n^+}$ ainsi Φ est bijective et $\Phi^{-1} = \varphi$.

6.3
$(A_k)_k$ converge vers A donc par continuité de la trace ; $(Tr(A_k))_k$ converge vers $Tr(A)$.
D'autre part $\|\sqrt{A_k}\|^2 = Tr({}^t\sqrt{A_k}\sqrt{A_k}) = Tr(A_k)$ qui le terme d'une suite convergente donc la suite $(\sqrt{A_k})_k$ est bornée.

6.4
la suite $(\sqrt{A_k})_k$ du fermé S_n^+ est bornée donc possède au moins une valeur d'adhérence, il existe une sous suite $(\sqrt{A_{\chi(k)}})_k$ de $(\sqrt{A_k})_k$ qui converge vers un certain C de S_n^+.
Si C_1 et C_2 deux valeur d'adhérences de $(\sqrt{A_k})_k$,soient alors $(\sqrt{A_{\chi_1(k)}})_k$ et $(\sqrt{A_{\chi_2(k)}})_k$ deux sous suites de $(\sqrt{A_k})_k$ qui convergent respectivement vers C_1 et C_2.
Donc on composant par φ qui est continue et en utilisant la convergence de la suite $(A_k)_k$ on trouve $C_1^2 = A = C_2^2$ or φ est bijective et donc $C_1 = \sqrt{A} = C_2$.
D'où la suite $(\sqrt{A_k})_k$ possède une unique valeur d'adhérence qui n'est d'autre que $\sqrt{A}$ d'où : $(\Phi(\sqrt{A_k}))_k$ converge vers $\sqrt{A}$.
En conclusion Φ est continue.

7.1
Il est clair que l'application $H \mapsto AH + HA$ est un endomorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ montrons qu'elle est injective .
soit $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $AH + HA = 0$.
$A \in S_n^+$ donc diagonalisable et ses valeur propres sont strictements positives .
Soit $(X_1, X_2, .., X_n)$ une base de vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A , notons λ_i la valeur propre associée à X_i pour $i = 1, 2, .., n$.
Soit $i \in \{1, 2, .., n\}$ alors $(AH + HA)^t X_i = 0$ et donc $AH^t X_i = -HA^t X_i$ et par suite $AH^t X_i = -\lambda_i H^t X_i$ donc nécessairement $H^t X_i = 0$ car si non A aurait une valeur propre négative $-\lambda_i$ ce qui est en contradiction avec $sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
En conclusion $\forall i \in \{1, 2, .., n\}; H^t X_i = 0$ et par suite $H = 0$ car l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé est nul sur la base $(X_1, X_2, .., X_n)$.
D'où $H \mapsto AH + HA$ est un automorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

7.2
Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
si $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ on a alors :

$$\Psi(A+H) - \Psi(A) = (A+H)^2 - A^2 = \underbrace{AH + HA}_{\texttt{lineaire en H}} + \underbrace{H^2}_{\texttt{négligeable par rapport à H}}$$

Donc Ψ est différentiable en A et $\forall H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$d\Psi(A)(H) = AH + HA$$

.

7.3
L'application notée $\widetilde{\Psi} : A \mapsto A^2$ de S_n^+ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable qui réalise une bijection de l'ouvert S_n^{++} de S_n^+ dans lui même .
De plus $\forall A \in S_n^{++}$; $d\widetilde{\Psi}(A) = d\Psi(A)$ est un automorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
Donc Ψ réalise un difféomorphisme de S_n^{++} dans lui même .