

Concours Marocain-2004

Corrigé Math 2

Par My Ismail Mamouni
MP-CPGE My Youssef, Rabat.

Exemples d'utilisation du théorème de Courant-Fischer

*1^{re} Partie

A- Étude d'une matrice

$$1. M = U {}^t U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (u_1 \quad \dots \quad u_n) = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2^2 & & u_2 u_n \\ \vdots & & & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on a : $m_{i,j} = u_i u_j$ et $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n u_i^2$.

2. La j -ème colonne de M est $u_j U$.
3. On sait que le rang d'une matrice est égal celui de ses colonnes, or toutes les colonnes de M sont proportionnelles U , donc leur rang vaut 1, d'où $\text{rg}(M) = 1$.
4. $\text{rg}(M) = 1 \neq n$, donc M n'est pas inversible en particulier 0 est une valeur propre de M , d'autre part $MY = 0 \Leftrightarrow {}^t Y U {}^t U Y = 0 \Leftrightarrow \|{}^t U Y\| = 0 \Leftrightarrow {}^t U Y = 0$ d'où le sous-espace propre associé est gale $\{Y \in \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R}, {}^t U Y = 0\}$. Sa dimension est $n - 1$ car c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R}$ puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$Y \longmapsto {}^t U Y$$
5. $MU = U {}^t U U$, donc ${}^t U U$ est une autre valeur propre de M avec U est un vecteur propre, et dont la dimension du sous-espace propre associé ne peut pas dépasser 1, puisque déjà celui associé à 0 est de dimension $n - 1$, donc sa dimension est 1, engendré par U .
6. La matrice M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = \text{diag}({}^t U U, 0, \dots, 0)$, car les sous-espaces associés respectivement aux valeurs propres ${}^t U U$ et 0 sont $\text{Vect}(U)$ et $\{Y \in \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R}, {}^t U Y = 0\} = \text{Vect}(U)^\perp$ de dimension 1 et $n - 1$

B- Théorème de Courant-Fischer

1. Parce que toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. $R_A(e_k) = \frac{\langle Ae_k, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \frac{\langle f(e_k), e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \lambda_k$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ car $f(e_k) = \lambda_k e_k$.
3. $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, donc $f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, d'où $\langle f(v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et $\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
4. On a $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, d'où $\lambda_1 \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \leq \langle f(v), v \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \langle v, v \rangle$, donc $\lambda_1 \leq R_A(v) \leq \lambda_n \quad \forall v \neq 0$, d'où $\lambda_1 \leq \min_{v \neq 0} R_A(v)$ et $\lambda_n \leq \max_{v \neq 0} R_A(v)$, d'autre part $R_A(e_1) = \lambda_1$, d'où $\lambda_1 \geq \min_{v \neq 0} R_A(v)$ et $R_A(e_n) = \lambda_n$ d'où $\lambda_n \geq \max_{v \neq 0} R_A(v)$.
Donc : $\lambda_1 = \min_{v \neq 0} R_A(v)$ et $\lambda_n = \max_{v \neq 0} R_A(v)$.
5. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, $w \in V_k \implies w = \sum_{i=1}^k x_i e_i \implies \langle f(w), w \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2$
et $\langle w, w \rangle = \sum_{i=1}^k x_i^2$, d'où $R_A(w) = \frac{\langle f(w), w \rangle}{\langle w, w \rangle} \leq \lambda_k \quad \forall w \in V_k \setminus \{0\}$, d'où $\lambda_k \geq \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ or $e_k \in V_k \setminus \{0\}$ et $R_A(e_k) = \lambda_k$, d'où $\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$.
6. (a) Supposons $\dim(F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) = 0$, alors $\dim(F_1 \oplus \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) = k + (n - k + 1) = n + 1$, impossible puisque $(F_1 \oplus \text{Vect}(e_k, \dots, e_n))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R}$ qui est de dimension n , d'où $\dim(F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) \neq 0$ et par suite $\dim(F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)) \geq 1$.
- (b) $w \in F_1 \cap \text{Vect}(e_k, \dots, e_n) \implies w = \sum_{i=k}^n x_i e_i \implies \langle f(w), w \rangle = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2$ et $\langle w, w \rangle = \sum_{i=k}^n x_i^2$, d'où $R_A(w) = \frac{\langle f(w), w \rangle}{\langle w, w \rangle} \geq \lambda_k$.
- (c) D'après 5.) on a : $\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ et $V_k \in \mathcal{F}_k$, d'où $\lambda_k \geq \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \right)$, et d'après 6.b) $\lambda_k \leq R_A(w) \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \quad \forall F \in \mathcal{F}_k$, d'où $\lambda_k \leq \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \right)$, d'où l'égalité.
7. (a) L'application $\psi_A : v \mapsto \langle Av, v \rangle$ est continue sur $\mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R}$ en tant que produit scalaire de deux fonctions continues car linéaires $v \mapsto Av$ et $v \mapsto v$ et on en déduit la continuité de l'application R_A sur $\mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car rapport de deux fonctions continues $v \mapsto \langle Av, v \rangle$ et $v \mapsto \langle v, v \rangle$ avec un dénominateur qui ne s'annule jamais.
- (b) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on cherche les relier par un chemin qui ne passe pas par l'origine.
– 1r cas $0 \notin [A, B]$ alors le chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$ fera bien
$$t \longmapsto tA + (1-t)B$$
l'affaire.
– 1r cas $0 \in [A, B]$, on se fixe un élément $C \in \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que: $0 \notin [A, C]$ et $0 \notin [C, B]$, on relie alors A C puis C B .

D'où l'ensemble $\mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et l'image de l'application R_A est aussi un ensemble connexe par arcs de \mathbb{R} , donc un intervalle car les seuls connexes par arcs de \mathbb{R} sont ses intervalles.

- (c) D'après ce qui précède $\{R_A(v), v \in \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ est un intervalle, or $\lambda_1 = \min_{v \neq 0} R_A(v)$ et $\lambda_n = \max_{v \neq 0} R_A(v)$. D'o $\{R_A(v), v \in \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \setminus \{0\}\} = [\lambda_1, \lambda_n]$

* 2^{me} Partie

1. Soit B une matrice symétrique réelle d'ordre n .

supposons B définie positive et soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé, alors ${}^tXBX = \lambda\|X\|^2 > 0$ d'o $\lambda > 0$

Inversement, supposons B admet deux valeurs propres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, comme B est symétrique alors elle orthogonalement diagonalisable, c'est dire $\exists P$ inversible telle que

$$B = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P, \text{ d'où } \forall X \neq 0 \text{ on a : } {}^tXBX = {}^tX {}^tP \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} PX = {}^t$$

$$YY > 0 \text{ où } Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} PX \neq 0 \text{ car } X \neq 0, \text{ d'où } B \text{ est définie positive.}$$

Conclusion : B est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. (a) A est définie positive, donc pour ${}^tX = (1, 0) \neq 0$ on a : $a = {}^tXAX > 0$ d'autre part $\det(A) = ac - b^2 > 0$ car c'est le produit des valeurs propres de A .

(b) Tout calcul fait : ${}^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left((x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2})y^2 \right) = a \left((x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{ac-b}{a^2})y^2 \right) > 0$. Donc A est définie positive.

3. (a) Montrer que $\langle g(x), y \rangle = \langle p \circ f(x), y \rangle = \langle f(x), p(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$ car p projecteur orthogonal sur H et $y \in H$ et de même $\langle x, g(y) \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ or f est symétrique d'o $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$, donc $\langle g(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$, et alors g est un endomorphisme autoadjoint de H .

- (b) Soit (e'_1, \dots, e'_{n-1}) base propre orthonormée de H associée à g dont les valeurs propres sont μ_1, \dots, μ_{n-1} , pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on pose : $V'_k = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_k)$, comme précédemment on montre que $\mu_k = \max_{v \in V'_k \setminus \{0\}} R_A(v)$, or $V'_k \in \mathcal{F}_k$ et

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \right), \text{ d'où } \lambda_k \leq \mu_k.$$

- (c) Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

i. Supposons $\dim(F \cap H) < k$, donc $\dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H) = n+k - \dim(F \cap H) > n$, impossible puisque $F \cap H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_0((n-1), 1)\mathbb{R}$ qui est de dimension n d'o $\dim(F \cap H) \geq k$.

ii. $g(v) = p(f(v))$, donc $g(v) - f(v) \in H^\perp$, or $v \in H$, d'où $\langle g(v) - f(v), v \rangle = 0$ et donc $\langle g(v), v \rangle = \langle h(v), v \rangle$, en particulier

$$\langle g(v), v \rangle \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in G \setminus \{0\}, \text{ d'où}$$

$$\max_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{\langle g(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle} \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

iii. En passant au min dans l'ingalité précédente et en utilisant le théorème de Courant–Fischer gauche pour g et droite pour f et vu que G est de dimension k et F de dimension $k+1$, on conclut que $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$.

4. (a) A_{n-1} n'est autre que la matrice de g , elle est symétrique car g est auto-adjoint.
 (b) Application directe de ce qui précède on a $\lambda_k \leq \mu'_k \leq \lambda_{k+1}$ puisque les μ'_k sont aussi valeurs propres de g .
 (c) Si la matrice A est définie positive, alors toutes ses valeurs propres λ_k sont strictement positives il en sera de même pour les valeurs propres μ'_k de la matrice A_{n-1} , or A_{n-1} est symétrique donc orthogonalement diagonalisable, d'où $\exists P$ inversible

telle que $A_{n-1} = {}^t P \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \mu'_n \end{pmatrix} P$, d'où $\forall X \neq 0$ on a :

${}^t X A_{n-1} X = {}^t X {}^t P \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \mu'_n \end{pmatrix} P X = {}^t Y Y > 0$ où

$Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu'_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & \sqrt{\mu'_n} \end{pmatrix} P X \neq 0$ car $X \neq 0$, d'o A_{n-1} est définie positive.

5. (a) Si A est définie positive alors toutes les matrices A_k sont aussi définie positive d'après la question précédente, donc leurs déterminants sont tous strictement positifs.

- (b) Le resultat est déjà vérifié pour $n = 2$.

Supposons le resultat vrai pour $n - 1$, on peut donc déjà affirmer que A_{n-1} est définie positive, d'où $\mu'_k > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n - 1$, en particulier $\lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$,

or $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$, d'où $\lambda_1 > 0$, ainsi A est une matrice symétrique dont toutes

les valeurs propres sont strictement positives, donc définie positive.

6. Un exemple d'utilisation :

- (a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, la matrice $M(t)$ est symétrique définie positive.

- (b) En déduire que la matrice $\forall X \neq 0 {}^t X M_1 X = {}^t X (\int_0^1 M(t) dt) X = \int_0^1 {}^t X M X dt > 0$ car ${}^t X M X > 0$, d'o M_1 est définie positive.

* 3^{me} Partie A- Une deuxième application

1. (a) $\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$ on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v)$ d'où

$$\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_{A'}(v) = \max_{v \in F \setminus \{0\}} (R_A(v) + R_E(v)) \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_E(v) \leq$$

$$\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \max_{v \neq 0} R_E(v) = \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \mu_n \text{ d'où}$$

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_{A'}(v) \leq \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) + \mu_n \text{ et donc } \lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n, \text{ d'autre part,}$$

$\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$ on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v) \geq R_A(v) + \mu_1$, en passant une première fois au max sur $v \in F \setminus \{0\}$ puis une deuxième fois au min sur $F \in \mathcal{F}$ on obtient l'autre égalité d'où pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\lambda_k + \mu_1 \leq \lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n$.

(b) D'après la question précédente on a : $\mu_1 \leq \lambda'_k - \lambda_k \leq \mu_n$, d'où $|\lambda'_k - \lambda_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$, montrons alors que $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|(A - A')X\|}{\|X\|} = \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$, en effet $A - A' = E$ est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale, (e'_1, \dots, e'_n) associée aux valeurs propres $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$, d'où $|\mu_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|) = r$, et $\forall X \neq 0$ on a $X = \sum_{k=1}^n x_k e'_k$, d'o $X = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k e'_k$ en particulier $\|EX\|^2 = \sum_{k=1}^n \mu_k^2 x_k^2 \leq r^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = r^2 \|X\|^2$, d'où $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|EX\|}{\|X\|} \leq r$, d'autre part $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \frac{\|Ee'_1\|}{\|e'_1\|} = |\mu_1|$ et $\|A - A'\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \frac{\|Ee'_n\|}{\|e'_n\|} = |\mu_n|$, d'o $\|A - A'\| \geq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$ d'où l'égalité.

2. Soit $A \in S_n^+$, on cherche $\varepsilon > 0$ tel que: $\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies A' \in S_n^+$, en effet : $\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies |\lambda'_k - \lambda_k| \leq \varepsilon - \varepsilon \geq \lambda'_k - \lambda_k \implies \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k \implies \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k$, si on prend $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k > 0$, alors $\lambda'_k \geq \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k > 0$, $\forall 1 \leq k \leq n$, ainsi toutes les valeurs propres de A' qui est symétrique sont strictement positives, d'o A' est définie positive.

B- Une dernière application

1. Les matrices R et S sont orthogonales, d'où

$${}^tRR = I_n \text{ et } {}^tSS = I_{n-1}, \text{ d'où } {}^tQQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tS \end{pmatrix} {}^tRR \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tSS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n, \text{ d'où la matrice } Q \text{ est orthogonale.}$$

2. Simple calcul, en utilisant les relations : ${}^tRMR = \begin{pmatrix} {}^tUU & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t a \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix}$ et ${}^tSA_{n-1}S = \text{diag}(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$.
3. On a $A_\varepsilon - A = \varepsilon M$, donc A_ε jouera le rôle de A' et εM celui de E , dont les valeurs propres sont $\mu_1 = 0$ et $\mu_n = \varepsilon {}^tUU$.
4. (a) C'est un résultat du cours puisque la matrice Q est orthogonale.

(b) le coefficient d'indice (i, j) de tQAQ s'obtient en faisant le produit scalaire de la i -ème ligne de tQ avec la j -ème colonne de $AQ = AC_j$, donc ce coefficient est

$${}^tC_i A C_j = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j = 1 \\ \alpha_i & \text{si } i = j \geq 2 \\ \beta_i & \text{si } i = 1, j \geq 2 \text{ ou } j = 1, i \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Soit } X = \sum_{i=1}^n y_i C_i \in \mathcal{M}_0(n, 1)\mathbb{R} \text{ alors } {}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j {}^tC_i A C_j = \alpha y_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i^2 + 2 \sum_{j=2}^n \beta_j y_1 y_j.$$

(c) De manière analogue on a : ${}^tXA_\varepsilon X = (\alpha + \varepsilon {}^tUU)y_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i^2 + 2 \sum_{j=2}^n \beta_j y_1 y_j = {}^t$

$$XAX + \varepsilon {}^tUUy_1^2.$$

$$\text{Ainsi } R_{A_\varepsilon}(X) = \frac{{}^tXA_\varepsilon X}{\langle X, X \rangle} =$$

$$\frac{{}^tXAX + \varepsilon {}^tUUy_1^2}{\langle X, X \rangle} = R_A(X) + \varepsilon {}^tUU \frac{y_1^2}{\langle X, X \rangle}.$$

(d) Choisir $X \in F$ tel que: $F \in \mathcal{F}_2$ avec $y_1 = 0$.

FIN DU CORRIGÉ