ROYAUME DU MAROC

Ministère Chargé de l'Enseignement
Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2000

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Définitions et notations

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 2$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv, $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id.

Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}(u)$ la trace de u et $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on pose $u^0 = Id$ et si $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).

On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & (u, v) & \mapsto & [u, v] \end{array}$$

et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_u : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & v & \mapsto & [u, v] \end{array}$$

Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m. Enfin, $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kroneker (on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

1$^{\text{ère}}$ Partie

A- Quelques propriétés de Φ_u

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie.
   (a) Montrer que $\mathrm{Vect}(\{Id, u, \ldots, u^{n-1}\})$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\,\Phi_u) \geqslant 2$.
   (b) Montrer que si $v \in \mathrm{Ker}\,\Phi_u$, alors $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

4. Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Im}\Phi_u \subset \mathcal{T}$.
Existe-t-il $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[u, v] = Id$? Peut-on avoir $\operatorname{Im}\Phi_u = \mathcal{T}$?

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
   (b) En déduire que $\operatorname{Ker}\Phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.

6. (a) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$; montrer par récurrence sur k que $(\Phi_u)^k(v) = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p u^{k-p} v u^p$.
   (b) En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

B- Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

1. u peut-il être une homothétie ?

2. Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

3. En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :
$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$
où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

4. On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in (\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}))^2$
   (a) Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.
   (b) On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$; établir l'équivalence :
$$A = U'V' - V'U' \iff [\ {}^tX = -{}^tR(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S\ ].$$

5. Montrer alors par récurrence sur n que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

C- Détermination de $\mathrm{Tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que :
$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

1. Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2. Calculer, pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \ldots, n\}^4$, le produit $u_{i,j}u_{k,l}$ et montrer que l'on a :
$$\forall\, (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2,\ \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}u_{i,k}\ .$$

3. En déduire $\mathrm{Tr}(\Phi_u)$.

2^{ème} Partie

A- Cas où u est diagonalisable

Dans cette question on suppose que u est diagonalisable.

On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Pour simplifier les notations dans cette question, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i \quad \forall\ i \in \{1, .., n\}$.

   (a) Montrer que
   $$\forall\,(i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2 \ :\ \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}\ .$$

   (b) En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\mathrm{Sp}(\Phi_u)$.

2. Montrer que
   $$\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall\, i \in \{1, .., p\} \quad v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}.$$

3. En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.
   Quel est le rang de Φ_u ?

4. On suppose en plus que u a n **valeurs propres distinctes**.
   Quel est la dimension de $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$? Quel est le polynôme minimal de u ?
   En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \mathrm{Vect}(Id, u, \ldots, u^{n-1})$.

B- Cas où dim E=2

Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie, $\dim E$=2.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \mathrm{Vect}(Id, u)$ (on pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence).

2. Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2 + \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.

3. Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?

4. On suppose $\beta \neq 0$; étudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5. On suppose Φ_u diagonalisable.

   (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul .

   Dans la suite de la question, v (respectivement w) désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ (respectivement $-\lambda$).

   (b) L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\mathrm{Tr}(v)$ puis v^2.

   (c) Détermination de $\mathrm{Sp}(u)$:

   - Pour quelles valeurs du vecteur e la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?
   - Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que $\mathrm{Sp}(u) = \{\frac{\mathrm{Tr}(u)-\lambda}{2}, \frac{\mathrm{Tr}(u)+\lambda}{2}\}$. Que peut-on alors dire de u ?

   (d) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Ker}\, w$ puis en déduire que u est diagonalisable.

C- Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i,\ \forall\, i \in \{1, .., n^2\}$.
Soit enfin $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

1. Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de $\lambda,\ \beta_i$ et $v_i(x)$.
2. Montrer que l'application $\Psi :\ \mathcal{L}(E) \longrightarrow E,\ \ v \mapsto v(x)$ est linéaire surjective.
3. Montrer alors que u est diagonalisable.

3ème Partie

Soit λ une valeur propre **non nulle** de Φ_u et v un vecteur propre associé ; on désigne par P_u le polynôme caractéristique de u.

1. (a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{K},\ v(u - xId) = (u - (x + \lambda)Id)v$.
   (b) Qu'en déduit-on sur P_u si $\det v \neq 0$.
   (c) Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.
2. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$; qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$?
3. Conclure que v est un endomorphisme nilpotent.

   Dans la suite on suppose que dim Ker v = 1
4. (a) Montrer que pour tout $p \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathrm{Im}\, v^p$ est stable par les endomorphismes u et v.
   (b) Soit $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$; en considérant les endomorphismes v_1 et u_1 induits par v et u sur $\mathrm{Im}\, v^p$, montrer que $\dim(\mathrm{Im}\, v^p) = 1 + \dim(\mathrm{Im}\, v^{p+1})$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.
5. Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$; montrer que la famille $\mathcal{B} = (e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.
6. On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) /\ wv - vw = \lambda v\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (n-1)\lambda)$.
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la direction.
   (c) Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de $\mathcal{A}$.
7. Quelle est alors la forme de la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme u ?
8. On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base $\mathcal{B}'$ de E est de la forme $\mathrm{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \alpha + 2\lambda, \ldots, \alpha + (n-1)\lambda)$; décrire par leur matrice dans la base $\mathcal{B}'$ les éléments de l'espace $E_{\Phi_u}(\lambda)$; quelle est sa dimension ?

FIN DE L'ÉPREUVE