CORRIGÉ : MATH 2 ; MP ; Centrale_2009

Partie I : Produit de deux endomorphismes autoadjoints positifs

On se propose dans cette partie de montrer que si $u,v \in S^+(E)$, alors $u \circ v$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

I-A - Généralités

I-A-1)

Soit $u \in \pounds(E)$ tel que : $u = u^*$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale de E.

$\Rightarrow]$ On suppose que u est positif (resp défini positif).

Soient λ une valeur propre de u, et $x \in E$ un veteur propre de u associé à λ.

$(u(x) \mid x) = \lambda(x \mid x) \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$. (resp $(u(x) \mid x) = \lambda(x \mid x) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$)

Alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ (resp $Sp(u) \subset \mathbb{R}^{*+}$)

$\Leftarrow]$ Si $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ (resp $Sp(u) \subset \mathbb{R}^{*+}$)

Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une base orthonormale de E, de vecteurs propres de u.

Pour chaque $i \in [[1,n]]$, on note λ_i la valeur propre de u associée à x_i.

Soit $x = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i \in E$. $(u(x) \mid x) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0$

(resp $(u(x) \mid x) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0$ et si $x \neq 0$, $\exists i_0 \in [[1,n]]$ tq $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $(u(x) \mid x) \geq \lambda_{i_0}\alpha_{i_0}^2 > 0$)

Alors u est positif (resp u est défini positif)

I-A-2) Soient $u \in S^{++}(E)$, $(x_1,\ldots,x_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u et $D = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ la matrice de u dans cette base, la matrice de u^{-1} dans cette base est $D^{-1} = diag(\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1})$ est symétrique dans une base orthonormale, alors $u^{-1} \in S(E)$.

De plus $Sp(u^{-1}) = \{\lambda_i^{-1}\ ;\ 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^{*+}$, alors $u^{-1} \in S^{++}(E)$.

I-A-3) Soit $u \in S^+(u)$.

a) Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u et $D = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ la matrice de u dans cette base. Soit $s \in \pounds(E)$ de matrice $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ dans cette base. Puisque Δ est symétrique et la base $(x_1,\ldots,x_n)$ est orthonormale, alors $s \in S(E)$.

De plus $Sp(s) = \{\sqrt{\lambda_i}\ ;\ 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^+$, alors $s \in S^+(E)$. De plus $\Delta^2 = D$ alors $s^2 = u$.

b) Soit $x \in E$ tel que : $(u(x) \mid x) = 0$, alors $(s^2(x) \mid x) = 0 = (s(x) \mid s^*(x)) = (s(x) \mid s(x))$.

Alors $s(x) = 0$ et $u(x) = s^2(x) = 0$.

I-B - Preuve du résultat

Soient $u,v \in S^+(E)$.

I-B-1) On note u_1 et w les endomorphismes de $\mathrm{Im}(u)$ induits par u et $u \circ v$ respectivement.

a) Soient $x,y \in \mathrm{Im}(u)$; $(u_1(x) \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = (x \mid u_1(y))$. d'où $u_1 \in S(\mathrm{Im}(u))$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, $\exists t \in E$ tel que : $x = u(t)$.

$(u_1(x) \mid x) = (u(x) \mid x) \geq 0$ alors $u_1 \in S^+(\mathrm{Im}(u))$ et $Sp(u_1) \subset \mathbb{R}^+$.

$u_1(x) = 0 \Rightarrow u \circ u(t) = 0 \Rightarrow (u \circ u(t) \mid t) = 0 = (u(t) \mid u(t)) \Rightarrow x = u(t) = 0$.

$0 \notin Sp(u_1)$ alors $Sp(u_1) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et $u_1 \in S^{++}(\mathrm{Im}(u))$.

b) Soient $x,y \in \mathrm{Im}(u)$. Puisque $u_1 \in S^{++}(\mathrm{Im}(u))$, d'aprés I-A-2) $u_1^{-1} \in S^{++}(\mathrm{Im}(u))$.

$\phi_{u_1^{-1}}(w(x),y) = (u \circ v(x) \mid u_1^{-1}(y)) = (v(x) \mid u \circ u_1^{-1}(y)) = (v(x) \mid u_1 \circ u_1^{-1}(y))$

$\phi_{u_1^{-1}}(w(x),y) = (v(x) \mid y) = (x \mid v(y)) = (u \circ u_1^{-1}(x) \mid v(y)) = (u_1^{-1}(x) \mid u \circ v(y))$

$\phi_{u_1^{-1}}(w(x),y) = \phi_{u_1^{-1}}(x,w(y))$.
Alors w est symétrique pour $\phi_{u_1^{-1}}$, et pour $y = x$, on obtient : $\phi_{u_1^{-1}}(w(x),x) = (v(x) \mid x) \geq 0$.
D'où : w est symétrique positif pour le produit scalaire $\phi_{u_1^{-1}}$.

I-B-2) On suppose que $\mathrm{Im}(u \circ v) \neq \{0\}$. (si non rien à montrer)
w est un endomorphisme diagonalisable de $\mathrm{Im}(u)$ (car w est symétrique pour le produit scalaire $\phi_{u_1^{-1}}$) alors la restriction de w au sous espace stable $\mathrm{Im}(u \circ v)$ est aussi diagonalisable, de plus d'aprés la question précédente $Sp(w) \subset \mathbb{R}^+$.
On conclus alors que la restriction de $u \circ v$ à $\mathrm{Im}(u \circ v)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

I-B-3) Soit $x \in \mathrm{Im}(u \circ v) \cap \ker(u \circ v)$, $w(x) = 0$, alors $0 = \phi_{u_1^{-1}}(w(x),x) = (v(x) \mid x)$.
Alors d'aprés (1), $v(x) = 0$. Il existe $t \in E$ tel que : $x = u \circ v(t) \Rightarrow v \circ u \circ v(t) = 0$.
$0 = (v \circ u \circ v(t) \mid t) = (u \circ v(t) \mid v(t)) \ \Rightarrow x = u \circ v(t) = 0$ (encore d'aprés (1))
$\mathrm{Im}(u \circ v) \cap \ker(u \circ v) = \{0\}$, alors d'aprés le théorème du rang, $E = \mathrm{Im}(u \circ v) \oplus \ker(u \circ v)$.

I-B-4) Si $u \circ v = 0$ alors $u \circ v$ est diagonalisable et $Sp(u \circ v) = \{0\} \subset \mathbb{R}^+$.
On suppose alors que $u \circ v \neq 0$, $\mathrm{Im}(u \circ v)$ est somme directe de sous espaces propres de w.
Alors d'aprés la question précèdente, E est somme directe de sous espaces propres de $u \circ v$.
$u \circ v$ est diagonalisable et $Sp(u \circ v) \subset Sp(w) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^+$.

I-C - Cas particulier

Soient $a \in S^{++}(E)$ et $f \in \pounds(E,F)$.
I-C-1)
a) Soit $y \in F$, l'application $[x \mapsto (f(x) \mid y)]$ est une forme linéaire sur E, alors il existe un unique vecteur $g(y) \in E$ tel que : $\forall x \in E \ ; \ (f(x) \mid y) = (x \mid g(y))$. Donc
Il existe une unique application $g : F \to E$ telle que : $\forall (x,y) \in E \times F$; $(f(x) \mid y) = (x \mid g(y))$.
Montrons que g est linéaire.
Soient $y,z \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $\forall x \in E$, ona :
$(x \mid g(\lambda y + z) - \lambda g(y) - g(z)) = (x \mid g(\lambda y + z)) - \lambda (x \mid g(y)) - (x \mid g(z))$
$(x \mid g(\lambda y + z) - \lambda g(y) - g(z)) = (f(x) \mid \lambda y + z) - \lambda (f(x) \mid y) - (f(x) \mid z) = 0$.
$\forall y,z \in F \ ; \ g(\lambda y + z) - \lambda g(y) - g(z) = 0$. D'où la linéarité de g.
Dans la suite l'application g est notée f^*.
b) Soit $y \in F$.
$f^*(y) = 0 \Leftrightarrow [\forall x \in E \ ; \ (x \mid f^*(y)) = 0] \Leftrightarrow [\forall x \in E \ ; \ (f(x) \mid y) = 0] \Leftrightarrow y \in [\mathrm{Im}(f)]^\perp$.
c) Soit $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'élèments de $\mathrm{Im}(f)$ telle que la suite $(f^*(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
$\ker(f^*) = [\mathrm{Im}(f)]^\perp$, alors $\ker(f^*) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
La restriction φ de f^* à $\mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme entre $\mathrm{Im}(f)$ et $f^*(\mathrm{Im}(f))$, φ^{-1} est linéaire en dimension finie, alors φ^{-1} est continue. $z_k = \varphi^{-1}(f^*(z_k)) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
d) Soient $x,y \in E$. $(f^* \circ f(x) \mid y) = (f(x) \mid f(y)) = (x \mid f^* \circ f(y))$. Alors $f^* \circ f \in S(E)$.
De plus : $\forall x \in E \ ; \ (f^* \circ f(x) \mid x) = (f(x) \mid f(x)) \geq 0$. D'où $f^* \circ f \in S^+(E)$.

I-C-2) On a : $a \in S^{++}(E)$, alors d'aprés I-A-2) $a^{-1} \in S^{++}(E) \subset S^+(E)$ et $f^* \circ f \in S^+(E)$, alors d'aprés I-B) $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme diagonalisable de E et $Sp(a^{-1} \circ f^* \circ f) \subset \mathbb{R}^+$.

On note ρ la plus grande valeur propre de $a^{-1} \circ f^* \circ f$.

I-C-3) Soit $x \in E$, $\|f(x)\|^2 = (f(x) \mid f(x)) = (x \mid f^* \circ f(x)) = (x \mid a \circ a^{-1} \circ f^* \circ f(x))$
$\|f(x)\|^2 = (a(x) \mid a^{-1} \circ f^* \circ f(x)) = \phi_a(x, a^{-1} \circ f^* \circ f(x))$.

D'aprés I-C-1-b) $(\mathrm{Im}(f^* \circ f))^\perp = \ker(f^* \circ f)$
D'aprés I-B-3) $E = \mathrm{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f) \oplus \ker(a^{-1} \circ f^* \circ f)$.
Posons : $x = x_1 + x_2$; avec $\begin{cases} x_1 = a^{-1} \circ f^* \circ f(z) \in \mathrm{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f) \\ x_2 \in \ker(a^{-1} \circ f^* \circ f) = \ker(f^* \circ f) = [\mathrm{Im}(f^* \circ f)]^\perp \end{cases}$.
$\|f(x)\|^2 = \phi_a(x, a^{-1} \circ f^* \circ f(x)) = (x_1 + x_2 \mid f^* \circ f(x_1)) = (x_1 \mid f^* \circ f(x_1))$.
$\|f(x)\|^2 = \phi_a(x_1, a^{-1} \circ f^* \circ f(x_1))$.
D'aprés I-B-1) $a^{-1} \circ f^* \circ f$ induit un endomorphisme symétrique positif de $\mathrm{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f)$.
Soit ρ' la plus grande valeur propre de la restriction de $a^{-1} \circ f^* \circ f$ à $\mathrm{Im}(a^{-1} \circ f^* \circ f)$.
$\|f(x)\|^2 = \phi_a(x_1, a^{-1} \circ f^* \circ f(x_1)) \leq \rho'\phi_a(x_1, x_1) = \rho'(a(x_1) \mid x_1)$. $(*)$
$0 \leq \rho' \leq \rho$ et $(a(x) \mid x) = (a(x_1) \mid x_1) + (a(x_1) \mid x_2) + (a(x_2) \mid x_1) + (a(x_2) \mid x_2)$.
$(a(x_1) \mid x_2) = (a(x_2) \mid x_1) = (f^* \circ f(z) \mid x_2) = 0$
$(a(x) \mid x) = (a(x_1) \mid x_1) + (a(x_2) \mid x_2) \geq (a(x_1) \mid x_1) \geq 0$. $(**)$
De $(*)$ et $(**)$ on déduit : $\forall x \in E$; $\|f(x)\|^2 \leq \rho(a(x) \mid x)$.

N.B :
Dans la ligne $(*)$ on a utilisé le résultat suivant :
Si V est un espace vectoriel euclidien non nul, et h un endomorphisme symétrique positif de E et ρ la plus grande valeur propre de h, alors : $\forall x \in E$; $(h(x) \mid x) \leq \rho\|x\|^2$.
Démontrons ce résultat.
Soit $(x_1 \ldots, x_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de h, et $\rho_1, \ldots, \rho_n$ les valeurs propres respectivement associées à $x_1 \ldots, x_n$. On suppose $\rho = \rho_n \geq \rho_{n-1} \geq \ldots \geq \rho_1 \geq 0$.
Soit $x = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i \in E$. $(h(x) \mid x) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \rho_i \alpha_i^2 \leq \rho \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^2 = \rho\|x\|^2$.

Partie II : **Minimisation d'une fonctionnelle quadratique**

Désormais, $a \in S^{++}(E), b$ un élèment fixé de E, et $f \in \pounds(E,F)$.
J est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in E$; $J(x) = \frac{1}{2}(a(x) \mid x) - (b \mid x)$.

II-A - Minimisation théorique

On considère un sous espace vectoriel V de E et on s'intéresse à la minimisation de la restriction de J à V.
II-A-1) Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de a, en considérant une base orthonormale de vecteurs propres de a, on obtient : $(a(x) \mid x) \geq \lambda_1\|x\|^2$.
Puisque $(b \mid x) \leq \|b\|.\|x\|$ alors : $J(x) = \frac{1}{2}(a(x) \mid x) - (b \mid x) \geq \frac{1}{2}\lambda_1\|x\|^2 - \|b\|.\|x\|$.
D'où $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$..

II-A-2) Le cas $V = 0$ est évident, supposons que $V \neq \{0\}$.
Soit $x_0 \in V$; $\exists r > 0$; $\forall x \in V$; $[\|x\| > r \Rightarrow J(x) > J(x_0)]$.
$x_0 \in \overline{B}_V(0,r)$, où $\overline{B}_V(0,r)$ est la boule fermée de V de centre O et de rayon r.
J est continue sur cette boule qui est compacte, puisque V est de dimension finie.
Alors J est minorée et atteint sa borne inf sur $\overline{B}_V(0,r)$.
$\exists y_0 \in \overline{B}_V(0,r)$ tel que $J(y_0) = \min\limits_{x \in \overline{B}_V(0,r)} J(x) \leq J(x_0)$.
Alors J atteint en y_0 son minimum sur V.

II-A-3) Soit $(x,y) \in V^2$ tel que : $x \neq y$.
a) $J(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(a(\frac{x+y}{2}) \mid \frac{x+y}{2}) - (b \mid \frac{x+y}{2})$
$J(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{8}(a(x) \mid x) + \frac{1}{8}(a(y) \mid y) + \frac{1}{8}(a(x) \mid y) + \frac{1}{8}(a(y) \mid x) - \frac{1}{2}(b \mid x) - \frac{1}{2}(b \mid y)$.

$J(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}J(x) + \frac{1}{2}J(y) - \frac{1}{8}((a(x) \mid x) + (a(y) \mid y) + (a(x+y) \mid x+y))$.
On a : $x \neq y$, alors $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, et puisque $a \in S^{++}(E)$ alors $(a(x) \mid x) > 0$ ou $(a(y) \mid y) > 0$.
D'où $\frac{1}{8}((a(x) \mid x) + (a(y) \mid y) + (a(x+y) \mid x+y)) > 0$ et $J(\frac{x+y}{2}) < \frac{J(x)+J(y)}{2}$.
b) Par l'absurde, supposons que J atteint son minimum sur V en deux points distincts x,y.
D'aprés la question précèdente : $J(\frac{x+y}{2}) < \frac{J(x)+J(y)}{2} = J(x) = J(y)$. ce qui est absurde.
D'où le point où J atteint son minimum sur V est unique.

II-A-4) Soit $x \in V$ et $(t,h) \in \mathbb{R} \times V$.
a) $J(x+th) - J(x) = \frac{1}{2}(a(x+th) \mid x+th) - \frac{1}{2}(a(x) \mid x) - (b \mid x+th) + (b \mid x)$
Aprés développement : $J(x+th) - J(x) = \frac{1}{2}(a(h) \mid h)t^2 + t(a(x) - b \mid h) = J(th) + t(a(x) \mid h)$.
b) La restriction de J à V est minimale en x si et seulement si
$\forall (t,h) \in \mathbb{R} \times V \quad ; \quad J(x+th) - J(x) = \frac{1}{2}(a(h) \mid h)t^2 + t(a(x) - b \mid h) \geq 0$
(i) Si $a(x) - b \in V^{\perp}$ alors $\forall h \in V$; $J(x+h) - J(x) = \frac{1}{2}(a(h) \mid h) \geq 0$.
(ii) Si $a(x) - b \notin V^{\perp}$ alors $\exists h \in V$ tel que : $(a(x) - b \mid h) \neq 0$.
Quitte à changer h par $-h$, on suppose que $(a(x) - b \mid h) > 0$.
$\forall t \in \mathbb{R}^*$; $\frac{1}{2}(a(h) \mid h) + \frac{(a(x)-b \mid h)}{t} \geq 0$ alors $-\infty = \lim\limits_{t \to 0\ ;\ t<0} \left(\frac{1}{2}(a(h) \mid h) + \frac{(a(x)-b \mid h)}{t}\right) \geq 0$.
Ce qui est absurde. Finalement :
La restriction de J à V est minimale en x si et seulement si $a(x) - b \in V^{\perp}$.

II-A-5) Ici $n = 3$ et w est l'élèment de E en lequel J est minimale.
Pour tout réel $k > J(w)$, on note Σ_k la surface d'équation $J(x) = k$.
Soit π un plan vectoriel inclus dans E tel que $w \notin \pi$.
a) Soit (i_1, i_2, i_3) une base orthonormale de vecteurs propres de a. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de a respectivement associées aux vecteurs propres i_1, i_2, i_3.
Pour tout $x \in E$, on pose : $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \in E$.
$2J(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 - 2b_1 x_1 - 2b_2 x_2 - 2b_3 x_3$.
$2\frac{\partial J}{\partial x_j}(w) = 2\lambda_j w_j - 2b_j = 0 \Rightarrow w_j = \frac{b_j}{\lambda j}$.
L'équation de Σ_k dans le repère (O, i_1, i_2, i_3) est :
$\lambda_1(x_1 - w_1)^2 + \lambda_2(x_2 - w_2)^2 + \lambda_3(x_3 - w_3)^2 = 2k + \frac{b_1^2}{\lambda_1} + \frac{b_2^2}{\lambda_2} + \frac{b_3^2}{\lambda_3} = 2k - 2J(w)$.
$\boxed{\Sigma_k \text{ est une éllipsoïde de centre le point } \Omega \text{ tel que } \overrightarrow{O\Omega} = w}$.
b) Si π est tangent à Σ_k en un point A, alors A est unique, et si $\overrightarrow{OA} = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$.
Alors $k = \frac{1}{2}(\lambda_1(\alpha_1 - w_1)^2 + \lambda_2(\alpha_2 - w_2)^2 + \lambda_3(\alpha_3 - w_3)^2) + J(w)$. et k est aussi unique.
L'équation de Σ_k dans le repère (Ω, i_1, i_2, i_3) est $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 = 2(k - J(w))$.
Si $A \in \Sigma_k$ tel que : $\overrightarrow{\Omega A} = \eta_1 i_1 + \eta_2 i_2 + \eta_3 i_3$, alors l'équation du plan tangent à Σ_k au point A est : $\lambda_1 \eta_1 X_1 + \lambda_2 \eta_2 X_2 + \lambda_3 \eta_3 X_3 = 2(k - J(w))$.
Soit : (π) $\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = \mu$ l'équation du plan π dans ce repère.
On a : $\mu \neq 0$ car le plan π ne passe pas par Ω. Alors :
π est le plan tangent à Σ_k au point A si et seulement si : $\forall j = 1,2,3$; $\eta_j = \frac{2\mu_j}{\mu\lambda_j}(k - J(w))$.
On pose alors : $\forall j = 1,2,3$; $\eta_j = \frac{2\mu_j}{\mu\lambda_j}(k - J(w))$ et $\overrightarrow{\Omega A} = \eta_1 i_1 + \eta_2 i_2 + \eta_3 i_3$
π est le plan tangent à Σ_k au point A si et seulement si $A \in \Sigma_k$.
π est le plan tangent à Σ_k au point A si et seulement si $4\frac{(k-J(w))^2}{\mu^2}(\frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}) = 2(k - J(w))$.
$\boxed{\pi \text{ est tangent à } \Sigma_k \text{ si et seulement si } k = J(w) + \frac{\mu^2}{2}.\frac{1}{\frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3}}}$.

c) $(\Sigma_k)\ \ x^2+2y^2+3z^2-2x=k$ et $(\pi)\ \ x+y+z=0.$

$(\Sigma_k)\ \ (x-1)^2+2y^2+3z^2=k+1$, alors $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\forall j=1,2,3\ \ ;\ \lambda_j=2j$ et $J(w)=-1.$

L'équation de (π) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est $X_1+Y_1+Z_1=-1.$ Alors :
$\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$ et $\mu=-1.$ La formule de la question précèdente donne :
$k=J(w)+\frac{\mu^2}{2}.\frac{1}{\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}+\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}+\frac{\mu_3^2}{\lambda_3}}=-1+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=-\frac{5}{11}.$

II-B - Lagrangien augmenté

Soit r un réel positif et L_r est l'application de $E\times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$L_r(x,p)=J(x)+\frac{r}{2}\|f(x)\|^2+(p\mid f(x)).$
On dit que (x,p) est un point selle de L_r si, pour tout couple (y,q) de $E\times F$,
$L_r(x,q)\le L_r(x,p)\le L_r(y,p)$ c'est à dire : $\begin{cases}L_r(x,.)\text{ est maximale en } p\\ L_r(.,p)\text{ est minimale en } x\end{cases}.$

II-B-1) Notons dans l'ordre de l'énoncé $(i);(ii);(iii)$ les trois propositions qu'on va montrer équivalentes.

$\boxed{(i)\Rightarrow(ii)}$ Si $L_r(x,.)$ est maximale en p, alors
$\forall q\in F\ \ ;\ \ J(x)+\frac{r}{2}\|f(x)\|^2+(p\mid f(x))\ \ge J(x)+\frac{r}{2}\|f(x)\|^2+(q\mid f(x))$
$\forall q\in F\ \ ;\ \ (p-q\mid f(x))\ \ge 0.$
Mais $\{p-q\ ;\ q\in F\}=F$, alors $\forall q\in F\ \ ;\ \ (q\mid f(x))\ \ge 0.$
$\forall q\in F\ ;\ -q\in F$, alors $\forall q\in F\ ;\ (q\mid f(x))\ =0.$ donc $f(x)\in F\cap F^{\perp}=\{0\}$ et $x\in\ker(f).$

$\boxed{(ii)\Rightarrow(iii)}$ Si $x\in\ker(f)$ alors $\forall q\in F\ ;\ L_r(x,q)=J(x).$ $L_r(x,.)$ est donc constante sur $F.$

$\boxed{(iii)\Rightarrow(i)}$ Si $L_r(x,.)$ est constante sur F, alors tout $p\in F$ est un maximum de $L_r(x,.)$

II-B-2)
$\Leftarrow]$ Supposons que $(a+rf^*\circ f)(x)+f^*(p)=b.$ Soit $y\in E.$
$\delta=L_r(x,p)-L_r(y,p)=\frac{1}{2}(a(x)\mid x)+\frac{r}{2}(f^*\circ f(x)\mid x)+(f^*(p)\mid x)-\frac{1}{2}(a(y)\mid y)-\frac{r}{2}(f^*\circ f(y)\mid y)-(f^*(p)\mid y).$
$\delta=\frac{1}{2}((a+rf^*\circ f)(x)+f^*(p)-b\mid x)-\frac{1}{2}((a+rf^*\circ f)(y)+f^*(p)-b\mid y)+\frac{1}{2}(b\mid x-y)+\frac{1}{2}(f^*(p)\mid x-y).$
$\delta=-\frac{1}{2}((a+rf^*\circ f)(y-x)\mid y)+\frac{1}{2}(b\mid y-x)+\frac{1}{2}(f^*(p)\mid x-y).$
$L_r(x,p)-L_r(y,p)=-\frac{1}{2}((a+rf^*\circ f)(y)\mid y).$
a et $rf^*\circ f$ sont symétriques positifs, alors : $\forall y\in E\ ;\ L_r(x,p)\le L_r(y,p).$

$\Rightarrow]$ Si $L_r(.,p)$ est minimale en x, alors :
$\forall y\in E\ ;\ J(x)+\frac{r}{2}\|f(x)\|^2+(p\mid f(x))\ \le J(y)+\frac{r}{2}\|f(y)\|^2+(p\mid f(y)).$
On pose : $y=x+th$ avec $(t,h)\in\mathbb{R}\times E.$ Un calcul comme celui du premier sens donne :
$\forall(t,h)\in\mathbb{R}\times E\ ;\ t^2((a+rf^*\circ f)(h)\mid h)+2t((a+rf^*\circ f)(x)+f^*(p)-b\mid h)\ge 0.$
Un raisonnement comme celui de II-A-4-b) donne :
$\forall h\in E\ ;\ ((a+rf^*\circ f)(x)+f^*(p)-b\mid h)=0.$ D'où $(a+rf^*\circ f)(x)+f^*(p)-b=0.$

II-B-3)

a) (x,p) est un point selle de $L_r \iff \begin{cases} L_r(.,p) \text{ est maximale en } p \\ L_r(x,.) \text{ est minimale en } x \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \ker(f) \\ a(x) + f^*(p) = b \end{cases}$

(Conjonction de II-B-1) et II-B-2))

b) Soit $x \in \ker(f)$ et $p \in F$, alors $L_r(x,p) = J(x)$ et $L_r(x,.)$ est maximale en p. (daprés II-B-1))

(i) S'il existe $p \in F$ tel que (x,p) est un point selle de L_r, alors $L_r(.,p)$ est minimale sur E en x, en particulier l'application $[x' \mapsto L_r(x',p) = J(x')]$ est minimale en x sur $\ker(f)$.

(ii) Réciproquement, supposons que la restriction de J à $\ker(f)$ est minimale en x.

D'aprés (2) $a(x) - b \in \ker(f)^\perp = \mathrm{Im}(f^*)$, alors il existe $p \in F$ tel que : $a(x) + f^*(p) = b$.

D'où d'aprés la question précèdente, (x,p) est un point selle de L_r.

II-B-4) Soit (x,p) un point selle de L_r. Soit $p' \in F$.

a) On a $x \in \ker(f)$, donc : d'aprés (4)

(x,p') un point selle de L_r si et seulement si $a(x) + f^*(p') = b = a(x) + f^*(p)$ si et seulement si $f^*(p'-p) = 0$ si et seulement si $p'-p$ est un élèment de $\ker(f^*) = [\mathrm{Im}(f)]^\perp$.

b) Soit h le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$ et $p' = h(p)$.

$p' - p \in [\mathrm{Im}(f)]^\perp$, alors d'aprés la question précèdente (x,p') est un point selle de L_r.

$\|p\|^2 = \|(p-p') + p'\|^2 = \|p-p'\|^2 + \|p'\|^2$ (Théorème de Pythagore).

$\|p'\| \leq \|p\|$ et on a : $\|p'\| = \|p\| \iff \|p'-p\| = 0 \iff p' = p$.

Si $p'' \in \mathrm{Im}(f)$ tel que (x,p'') est un point selle de L_r, alors $(p'-p'') \in \mathrm{Im}(f) \cap [\mathrm{Im}(f)]^\perp = \{0\}$.

D'où : $p'' = p'$, et Il existe un et un seul point selle (x,p') de L_r tel que $\|p'\|$ est minimale.

Partie III : Algorithmes d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz

On reprend les notations de la partie précèdente et on note x l'élèment de $\ker(f)$ en le quel la restriction de J à $\ker(f)$ est minimale. (l'existence de x est assurée par la question II-A-3-b))

On note p un élèment de F tel que (x,p) est un point selle de L_r.

(L'existence de p est assurée d'aprés II-B-3-b))

ρ désigne la plus grande valeur propre de $a^{-1} \circ f^* \circ f$.

Soit p_0 fixé dans F et $(\gamma_k)_k$ désigne une suite de réels à valeurs dans $[\alpha,\beta]$ tels que :

$0 < \alpha < \beta < 2(r + \frac{1}{\rho})$.

On définit la suite $(x_k)_k$ de E et la suite $(p_k)_k$ de F, comme suit :

$\forall k \in \mathbb{N}$; $L_r(.,p_k)$ est minimale en x_k et $p_{k+1} = p_k + \gamma_k f(x_k)$.

N.B :

(i) C'est clair que la suite $(p_k)_k$ existe dés que la suite $(x_k)_k$ existe.

(ii) L'existence de la suite $(x_k)_k$ est assurée par (3), puisque $a + rf^* \circ f$ est symétrique définie positive, donc inversible.

III-A

III-A-1) On pose pour tout k de $\mathbb{N}$, $y_k = x_k - x$ et $r_k = p_k - p$.

a)

(i) $r_{k+1} = p_{k+1} - p = p_k - p + \gamma_k f(x_k) = r_k + \gamma_k f(x_k - x) =$ (car $x \in \ker(f)$)

Finalement : $r_{k+1} = r_k + \gamma_k f(y_k)$.

(ii) $L_r(.,p_k)$ est minimale en x_k, alors d'aprés II-B-2) $(a + rf^* \circ f)(x_k) + f^*(p_k) - b = 0$.

$(a + rf^* \circ f)(y_k) + f^*(r_k) = b - (a + rf^* \circ f)(x) - f^*(p) = 0$.

b) $\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = (r_k - r_{k+1} \mid r_k + r_{k+1}) = (-\gamma_k f(y_k) \mid 2r_k + \gamma_k f(y_k))$ (d'aprés a) (i) ci-dessus)

$\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = -\gamma_k^2 \|f(y_k)\|^2 - 2\gamma_k (r_k \mid f(y_k)) = -\gamma_k^2 \|f(y_k)\|^2 - 2\gamma_k (f^*(r_k) \mid y_k)$

$\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = -\gamma_k^2\|f(y_k)\|^2 - 2\gamma_k(y_k \mid -(a+rf^*\circ f)(y_k))$ (d'aprés a) (ii) ci-dessus)
$\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = \gamma_k\big[2(a(y_k) \mid y_k) + (2r-\gamma_k)\|f(y_k\|^2\big]$.
On a : $\gamma_k \geq \alpha$; $2r-\gamma_k \geq 2r-\beta$ car $\gamma_k \in [\alpha,\beta]$; et $(a(y_k) \mid y_k) \geq \frac{1}{\rho}\|f(y_k)\|$ (d'aprés I-C-3))
Finalement : $\|r_k\|^2 - \|r_{k+1}\|^2 = \gamma_k\big[2(a(y_k) \mid y_k) + (2r-\gamma_k)\|f(y_k\|^2\big] \geq \alpha\big[2(r+\frac{1}{\rho})-\beta\big]\|f(y_k)\|^2$.
c) D'aprés la question précèdente, la suite $(\|r_k\|)_k$ est décroissante, et elle est minorée par 0, alors elle converge, alors d'aprés l'inégalité de la question précédente, la suite $(f(y_k))_k$ est convergente vers 0.
Donc, puisque $\gamma_k \geq \alpha > 0$, l'inégalité de la question précèdente permet de déduire que : $\lim\limits_{k\to\infty} (a(y_k) \mid y_k) = 0$.
Soit μ la plus petite valeur propre de a, alors $(a(y_k) \mid y_k) \geq \mu\|y_k\|^2 \geq 0$.
On déduit alors que la suite $(y_k)_k$ converge vers 0, c'est à dire la suite $(x_k)_k$ converge vers x.

III-B

III-B-1) On pose, pour tout entier k, $p_k = \overline{p_k} + \overline{q_k}$ où $(\overline{p_k},\overline{q_k}) \in \mathrm{Im}(f)\times(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.
a) D'aprés II-B-4), $\overline{p_k}$ est l'unique élèment de E de norme minimale tel que : $(x_k,\overline{p_k})$ est un point selle de L_r.
$\overline{p_{k+1}} + \overline{q_{k+1}} = \overline{p_k} + \overline{q_k} + \gamma_k f(x_k)$. D'où $\overline{q_{k+1}} - \overline{q_k} \in \mathrm{Im}(f)\cap(\mathrm{Im}(f))^{\perp} = \{0\}$.
Alors la suite $(\overline{q_k})_k$ est constante.
b) On a montré dans II-A-1-c) que la suite $(y_k)_k$ converge vers 0. alors $(a+rf^*\circ f)(y_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ car $(a+rf^*\circ f)$ est continue, puisque linéaire en dimension finie.
Alors d'aprés II-A-1)_a)_(i) $f^*(r_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, en plus $r_k = p_k - p = \overline{p_k} - \overline{p} + \overline{q_k} - \overline{q}$.
$\overline{q_k} - \overline{q} \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp} = \ker(f^*)$. D'où $f^*(\overline{p_k} - \overline{p}) \underset{k\to\infty}{\to} 0$.
c) $(\overline{p_k} - \overline{p})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathrm{Im}(f)$ et la suite $(f^*(\overline{p_k} - \overline{p}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors d'aprés I-C-1-c), la suite $(\overline{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{p}$.
$\overline{p_k} + \overline{q_k} = p_k = \overline{p_k} + \overline{q_0} \underset{k\to\infty}{\to} \overline{p} + \overline{q_0}$. D'où la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{p} + \overline{q_0}$.

Désormais, on choisit $p_0 = 0$ et la suite $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ constante égale à γ. Dans ces conditions, la suite $((x_k,p_k))_k$ converge vers $(\overline{x},\overline{p})$ point selle de L_r, avec $\|p\|$ minimale.

III-B-2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k on a :
$x_k = \Big([I_E - \gamma(a+rf^*\circ f)^{-1}\circ f^*\circ f]^k \circ (a+rf^*\circ f)^{-1}\Big)(b)$.
Pour $k=0$, on a : $(a+rf^*\circ f)(x_0) + f^*(p_0) = b$.
$(a+rf^*\circ f)$ est symétrique défini positif, alors inversible.
Donc, puisque $p_0 = 0$, on a : $x_0 = (a+rf^*\circ f)^{-1}(b)$. L'égalité est alors vraie pour $k=0$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $x_k = \Big([I_E - \gamma(a+rf^*\circ f)^{-1}\circ f^*\circ f]^k \circ (a+rf^*\circ f)^{-1}\Big)(b)$.
On a : $(a+rf^*\circ f)(x_{k+1}) + f^*(p_{k+1}) = b = (a+rf^*\circ f)(x_{k+1}) + f^*(p_k + \gamma f(x_k))$.
$(a+rf^*\circ f)(x_{k+1}) + b + \gamma f^*\circ f(x_k) - (a+rf^*\circ f)(x_k) = b$.
$(a+rf^*\circ f)(x_{k+1}) = ((a+rf^*\circ f) - \gamma f^*\circ f)(x_k)$.
$x_{k+1} = [I_E - \gamma(a+rf^*\circ f)^{-1}\circ f^*\circ f](x_k)$.
On remplace alors x_k par sa valeur donnée par l'hypothèse de récurrence.
$x_{k+1} = \Big([I_E - \gamma(a+rf^*\circ f)^{-1}\circ f^*\circ f]^{k+1} \circ (a+rf^*\circ f)^{-1}\Big)(b)$.

III-B-3) On suppose que, relativement à la base canonique de E (qui est orthonormale), la matrice de a est diagonale égale à $diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$.
On suppose que la matrice de f relativement aux bases canoniques de E et F, admet

pour coefficients génériques : $f_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \leq m \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$.

a) Les matrices de a et de $f^* \circ f$ dans la base canonique de E sont diagonales, il en est de même pour $G = I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f.$ alors G est autoadjoint.
Si $x \in \ker(f)$ alors $G(x) = x$, $\ker(f)$ est stable par G, et $(\ker(f))^\perp$ est stable par $G^* = G$.
b) On note ψ l'endomorphisme induit par $G = I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f$ sur $(\ker(f))^\perp$.
Notons $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ et $(f_1,\ldots,f_m)$ la base canonique de $F = \mathbb{R}^m$.
$f(e_i) = f_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $f(e_i) = 0$ pour $i > m$.
$(\ker(f))^\perp = vect(e_1,\ldots,e_m)$ et $\forall i \in [[1,m]]$; $f^* \circ f(e_i) = e_i$.
$\forall i \in [[1,m]]$; $\psi(e_i) = e_i - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1}(e_i) = e_i - \frac{\gamma}{\lambda_i + r} e_i = \frac{\lambda_i + r - \gamma}{\lambda_i + r} e_i$.
$(e_1,\ldots,e_m)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de ψ, alors ψ est autoadjoint, alors $\||\psi|\| = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{\lambda_i + r - \gamma}{\lambda_i + r} \right|$. On notera : $\epsilon = \||\psi|\|$.
c) r est supposé fixé, $\epsilon = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \left| \frac{\lambda_i + r - \gamma}{\lambda_i + r} \right|$.
Soit $\alpha \in]0,1[$ un réel assez petit, pour avoir $\epsilon \leq \alpha$, il suffit que :
$\forall i \in [[1,m]]$; $-\alpha \leq 1 - \frac{\gamma}{\lambda_i + r} \leq \alpha$
$\forall i \in [[1,m]]$; $(1+\alpha)(\lambda_i + r) \geq \gamma \geq (1-\alpha)(\lambda_i + r)$
$(1+\alpha)(\lambda_m + r) \geq \gamma \geq (1-\alpha)(\lambda_1 + r)$
On doit en particulier avoir : $(1+\alpha)(\lambda_m + r) \geq (1-\alpha)(\lambda_1 + r)$ et $\alpha \geq \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$.
On prend alors $\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$ et donc $\gamma = 2\frac{(\lambda_1 + r)(\lambda_m + r)}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$.
Dans ce cas : $\epsilon = \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{2r + \lambda_1 + \lambda_m}$.

N.B :
Cette valeur minimale est donnée par : $\left|1 - \frac{\gamma}{\lambda_1 + r}\right| = \left|1 - \frac{\gamma}{\lambda_m + r}\right|$.
d) Plus que r est grande, plus que $\epsilon = \||\psi|\|$ est petite, plus que la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est plus rapide.

en effet :
$\forall k \in \mathbb{N}$; $x_k = \left([I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k \circ (a + rf^* \circ f)^{-1}\right)(b)$.
$[I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f](x_k) \underset{k \to \infty}{\rightarrow} x = [I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f](x)$
$x = [I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k(x)$
$x - x_k = [I_E - \gamma(a + rf^* \circ f)^{-1} \circ f^* \circ f]^k(x - (a + rf^* \circ f)^{-1}(b))$.
$\|x - x_k\| \leq \epsilon^k \left\| x - (a + rf^* \circ f)^{-1}(b) \right\|$.

III-B-4) E (resp F) est toujours muni de sa base canonique $B_n = (e_1,\ldots,e_n)$ (resp $B_m = (f_1,\ldots,f_m)$).
Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que : $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$ et $b = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} e_i$.
Soit $F = (f_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de f dans les bases B_n et B_m.
On prend : $\forall (i,j) \in [[1,m]] \times [[1,n]]$; $f_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i + j = m + 1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$.

a) Soit $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On a B_n est une base orthonormale de E et A est symétrique, alors a est un endomorphisme autoadjoint de E.

$(a(x) \mid x) = {}^tXAX = \sum_{1 \leq i \leq n} i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \sum_{2 \leq i \leq n} (i-1) x_i^2 + \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^2 \geq 0.$

$(a(x) \mid x) = 0 \Rightarrow \forall i = 2, \ldots, n$; $x_i = 0$ et $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0.$

D'où a est un endomorphisme autoadjoint défini positif de E.

b) Posons $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. d'aprés III-B-2), $X_0 = (A + r\,{}^tFF)^{-1} B$.

Encore d'aprés III-B-2) ; $\forall k \in \mathbb{N}$; $X_{k+1} = [I_n - \gamma (A + r\,{}^tFF)^{-1}\,{}^tFF]^k X_0$.

Mais on prend $\gamma = 2r$, alors : $I_n - \gamma (A + r\,{}^tFF)^{-1}\,{}^tFF = (A + r\,{}^tFF)^{-1}(A - r\,{}^tFF)$.

$X_0 = (A + r\,{}^tFF)^{-1} B$

$\forall k \in \mathbb{N}$; $X_{k+1} = (A + r\,{}^tFF)^{-1}(A - r\,{}^tFF) X_k$.

Ce qui donne une procédure pour calculer les termes de la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.