Mathématiques I

Préliminaires et objectif du problème

On rappelle que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué par les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

On munit l'algèbre $C([-1, 1], \mathbb{C})$ des fonctions à valeurs complexes continues sur le segment $[-1, 1]$ de la norme $\| \|_\infty$ de la convergence uniforme, définie par

$$(\forall f \in C([-1, 1], \mathbb{C})), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \quad .$$

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est identifié à la fonction polynomiale qu'il induit sur $[-1, 1]$.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

- On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ elle est dominée par la suite $(n^{-k})_{n \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire si

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ (\exists M_k \in \mathbb{R}_+) \ (\forall n \in \mathbb{N}^*), \ \lambda_n \le \frac{M_k}{n^k} .$$

On note $\mathcal{E}_\infty$ l'ensemble des fonctions $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

  - $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
  - la suite $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

- On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle si, pour un certain réel $r \in \ ]0, 1[$, elle est dominée par la suite géométrique $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire si

$$(\exists r \in \ ]0, 1[\ ), (\exists M \in \mathbb{R}_+), (\forall n \in \mathbb{N}), \lambda_n \le M r^n$$

On note $\mathcal{E}_{\exp}$ l'ensemble des fonctions $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

  - $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
  - la suite $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle.

Filière MP

Remarque : Une suite à décroissance rapide (resp. exponentielle) converge vers 0 mais n'est pas forcément décroissante.

L'objectif du problème est de montrer, en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev établies en Partie I, que les fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$ sont exactement les fonctions de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et de relier les fonctions f de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$ aux fonctions f dont la série de Taylor

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

en tout point $a \in [-1,1]$ converge vers $f(x)$ sur un voisinage de a.

a) Vérifier que si une suite est à décroissance exponentielle alors elle est à décroissance rapide.

b) Vérifier que les ensembles $\mathcal{E}_\infty$ et $\mathcal{E}_{\exp}$ sont des sous-espaces vectoriels de $C([-1, 1], \mathbb{C})$. Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre ces deux sous-espaces ?

c)

i) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ dont toutes les dérivées sont bornées sur $[-1, 1]$ par un même réel M. Montrer que $f \in \mathcal{E}_{\exp}$.

ii) Donner des exemples de fonctions de $\mathcal{E}_{\exp}$.

Partie I - Polynômes de Tchebychev

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose : $(\forall x \in [-1, 1])$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

I.A - Premières propriétés des T_n

I.A.1) Montrer que T_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers. Le polynôme associé est encore noté T_n et s'appelle le $n-$ième polynôme de Tchebychev.

I.A.2) Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.

I.A.3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.

I.A.4) En déduire la parité, le degré et le coefficient dominant de T_n.

I.A.5) Écrire un algorithme pour calculer $T_n(X)$.

On pourra employer le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé ou un langage naturel non ambigu.

I.A.6) Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$, on a : $T_n(\cos t) = \cos nt$.

I.B - Calcul de normes

I.B.1) Calculer $\|T_n\|_\infty$.

I.B.2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\forall u \in \mathbb{R}), |\sin nu| \le n|\sin u|$.

I.B.3) En déduire que $\|T'_n\|_\infty = n^2$.

I.C - Encadrement de $T_n(x)$ sur $[1, +\infty[$

I.C.1) Montrer que

$$(\forall r \in \mathbb{R}^*),\ T_n\left(\frac{r + r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

I.C.2) Soit un réel $x \in [1, +\infty[$.

a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$.

b) En déduire que $1 \le T_n(x) \le \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$.

I.D - Équation différentielle vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n

I.D.1) En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0, \pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

I.D.2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Déduire de la question I.D.1 que

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\,\frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$.

Partie II - Application des polynômes de Tchebychev à la majoration des polynômes et de leurs dérivées

On introduit la subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ du segment $[-1, 1]$ définie par :

$$\forall j \in [0, n],\ a_j = \cos\left[\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right].$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [0, n]$ on appelle $E_i = [0, n] \setminus \{i\}$ l'ensemble des entiers naturels autres que i qui sont inférieurs ou égaux à n.

Enfin, pour tout $i \in [0, n]$ on note

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \in E_i} (X - a_j)}{\prod_{j \in E_i} (a_i - a_j)}$$

le i-ème polynôme élémentaire de Lagrange associé à la subdivision σ.

II.A - Majoration d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

II.A.1) Résoudre sur $[-1, 1]$ l'équation $|T_n(x)| = 1$ et calculer $T'_n(a_j)$ pour $j = n$, pour $j = 0$ puis pour $j \in [1, n-1]$.

II.A.2) Montrer que

$$T_n(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i(X) .$$

II.A.3) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| .$$

II.A.4) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que

$$(\forall x \in [1, +\infty[) ,\ |P(x)| \le \|P\|_\infty \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n .$$

II.B - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

II.B.1) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n]) ,\ T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left| L_i^{(k)}(x) \right| .$$

II.B.2) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n]) ,\ (\forall x \in [1, +\infty[) ,\ \left| P^{(k)}(x) \right| \le \|P\|_\infty T_n^{(k)}(x) .$$

II.C - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[-1, 1]$

Soit $P \in \mathbb{C}_n(X)$. On considère un entier $k \in [1, n]$.

II.C.1) On pose

$$(\forall \lambda \in [-1, 1]) ,\ P_\lambda(X) = P\left(\frac{\lambda + \varepsilon}{2} X + \frac{\lambda - \varepsilon}{2} \right) \text{ avec}$$

$\varepsilon = 1$ si $\lambda \in [0, 1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1, 0[$.

Montrer que :

$$\left| P_\lambda^{(k)}(1) \right| = \left(\frac{|\lambda| + 1}{2} \right)^k \left| P^{(k)}(\lambda) \right| .$$

II.C.2) En déduire que $\left\| P^{(k)} \right\|_\infty \le 2^k T_n^{(k)}(1) \|P\|_\infty$.

II.C.3) Montrer que :

$$\left\| P^{(k)} \right\|_\infty \le 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|P\|_\infty$$

et que, si $k = 1$, on a la majoration plus fine $\|P'\|_\infty \le 2n^2 \|P\|_\infty$.

Partie III - Détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$

On note $C_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. On munit $C_{2\pi}$ de deux normes, la norme quadratique N_2 définie pour $\varphi \in C_{2\pi}$, par

$$N_2(\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$ induite par le produit scalaire hermitien :

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi(t)}\psi(t)dt$$

et la norme N_∞ de la convergence uniforme définie par

$$N_\infty(\varphi) = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |\varphi(t)| .$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ on pose $e_k : t \mapsto e^{ikt}$. On rappelle que la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien $(C_{2\pi}, N_2)$ et que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le $k-$ième coefficient de Fourier d'une fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est le complexe

$$c_k(\varphi) = (e_k|\ \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-ikt}dt .$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note τ_n le sous-espace vectoriel de $C_{2\pi}$ engendré par les fonctions e_k où $k \in [-n, n]$:

$$\tau_n = \mathrm{vect}(e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n) \ ; \ \dim(\tau_n) = 2n+1 .$$

Soit $\varphi \in C_{2\pi}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(\varphi)e_k$$ le $n-$ième polynôme trigonométrique de Fourier de φ.

III.A - Propriétés liées aux normes N_2 et N_∞

III.A.1) On suppose que la série

$$\sum_{n \geq 1}(|c_n(\varphi)| + |c_{-n}(\varphi)|)$$ converge.

Montrer que la suite $(S_n(\varphi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ.

III.A.2) Soit $\varphi \in C_{2\pi}$ muni de la norme quadratique N_2. On rappelle que $S_n(\varphi)$ est la projection orthogonale de φ sur τ_n. En déduire que :

$$(\forall \omega \in \tau_n \setminus \{S_n(\varphi)\}) \ , N_2(\varphi - \omega) > N_2(\varphi - S_n(\varphi)) .$$

III.A.3) On suppose que la fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, avec $p \geq 1$. Montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^*) , |c_k(\varphi)| \leq \frac{N_\infty(\varphi^{(p)})}{|k|^p} .$$

III.B - Étude d'une application linéaire

On rappelle que $C([-1,1],\mathbb{C})$ est muni de la norme $\| \ \|_\infty$. On note L l'application linéaire qui à toute fonction f de $C([-1,1],\mathbb{C})$, associe la fonction Lf de $C_{2\pi}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad Lf(t) = f(\cos t)$.

Montrer que L est injective et calculer la norme subordonnée $|||L|||_\infty$ de L lorsque l'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_∞ puis la norme subordonnée $|||L|||_2$ de L lorsque l'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_2.

III.C - Propriétés liées aux coefficients de Fourier d'une fonction *Lf*

Dans cette section on considère une fonction f fixée dans $C([-1,1],\mathbb{C})$.

III.C.1) Vérifier que $c_{-k}(Lf) = c_k(Lf)$.

III.C.2) Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$(\forall k \geq 2),\ |c_k(Lf)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f - Q_{k-1}\|_\infty .$$

III.C.3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$(\forall x \in [-1,1]),\ U_n(f)(x) = S_n(Lf)(\arccos x) .$$

Montrer que :

$$U_n(f) = c_0(Lf) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)T_k .$$

III.C.4) On suppose que la série $\sum_{k\geq 1} |c_k(Lf)|$ converge. Montrer que :

$$\|f - U_n(f)\|_\infty \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)| .$$

III.D - Développement en série de Tchebychev d'une fonction *f* de $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$.

III.D.1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D.2) Montrer que :

$$(\forall x \in [-1,1]),\ f(x) = c_0(Lf) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n(x)$$

et que la série de fonctions converge normalement sur $[-1,1]$.

III.D.3) En déduire que f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [-1, 1]),\ f^{(k)}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x)$$

III.E - Achèvement de la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que f est une fonction de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.

III.E.1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.E.2) En déduire que $f \in \mathcal{E}_\infty$.

Partie IV - Étude de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$

IV.A - Caractérisation des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$

IV.A.1) Soit f une fonction de $C([-1, 1], \mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $f \in \mathcal{E}_{\exp}$.

b) La suite $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle.

IV.B - Développement en série de Tchebychev d'une fonction f de $\mathcal{E}_{\exp}$

On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$. Il existe donc un réel $r \in]0, 1[$ tel que :

$$(\exists M \in \mathbb{R}_+),\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ |c_n(Lf)| \le Mr^n.$$

IV.B.1) Justifier le fait que :

$$(\forall x \in [-1, 1]),\ f(x) = c_0(Lf) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n(x),$$

que la série de fonctions converge normalement sur $[-1, 1]$, que f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [-1, 1]),\ f^{(k)}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x).$$

IV.B.2) En déduire que

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ \|f^{(k)}\|_\infty \le \frac{2M}{1-r} \cdot \frac{k!}{[\lambda(r)]^k},\ \text{avec } \lambda(r) = \frac{(1-r)^2}{4r}.$$

IV.C - Développement en série de Taylor au voisinage de tout point $a \in [-1, 1]$ d'une fonction f de $\mathcal{E}_{\exp}$

On conserve les mêmes hypothèses qu'à la question précédente pour f. Soit un point $a \in [-1, 1]$.

Montrer que la série de Taylor :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

de f au point a converge vers $f(x)$ sur le voisinage $[-1, 1] \cap]a - \lambda(r), a + \lambda(r)[$ du point a.

IV.D - Inclusion stricte entre $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$ et $\mathcal{E}_{\infty}$

Montrer que la fonction f définie par

$$(\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}),\ f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ et } f(0) = 0$$

appartient à $\mathcal{E}_{\infty}$ mais n'appartient pas à $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$.

IV.E - Réciproque partielle concernant la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes développable en série entière sur un intervalle ouvert $]-\rho, \rho[$, avec $\rho > 1$. Montrer que la restriction de f au segment $[-1, 1]$ appartient à $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$.

••• FIN •••
