CC INP Mathématiques 1 MP (corrigé par Hugues Blanchard et Simon Billouet)

Partie 1 : Développement ternaire

1. Montrons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
   — On a tout d'abord $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
   — La suite nulle étant bornée, elle appartient bien à ℓ^∞ ;
   — Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de ℓ^∞, bornées respectivement par M_u et M_v et λ, μ deux réels, l'inégalité triangulaire nous apprend que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\mathrm{M}_u + |\mu|\mathrm{M}_v$$
   ce qui montre que $\lambda u + \mu v$ est bornée, donc dans ℓ^∞.

   Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc un espace vectoriel réel.
   Montrons maintenant que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞ :
   — **Caractère bien défini** : si $u \in \ell^\infty$,
   $$\{|u_n|, n \in \mathbb{N}^*\}$$
   est une partie non vide (elle contient $|u_1|$) et majorée (puisque u est bornée) de $\mathbb{R}$, donc par propriété de la borne supérieure, $\|u\|$ existe.
   — **Séparation** : si $u \in \ell^\infty$ est telle que $\|u\| = 0$, cela veut dire que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n| = 0$, donc que 0 majore tous les $|u_n|$, qui sont des nombres positifs. On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = 0$$
   et par suite, u est la suite nulle.
   — **Inégalité triangulaire** : soit $u, v \in \ell^\infty$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
   donc la quantité $\|u\| + \|v\|$ est un majorant de tous les nombres $|u_n + v_n|$, et elle est donc plus grande que le plus petit desdits majorants, à savoir $\|u + v\|$. On a donc bien :
   $$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
   — **Homogénéité** : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \ell'^\infty$. Si $\lambda = 0$, on a $\|\lambda u\| = 0 = 0\|u\|$. Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$|\lambda u_n| = |\lambda||u_n| \leqslant |\lambda|\|u\|$$
   De ce fait, $\|\lambda u\| \leqslant |\lambda|\|u\|$. Par ailleurs, on a $u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u)$, donc :
   $$\|u\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda u)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda u\|$$
   et donc
   $$\|\lambda u\| \leqslant \lambda\|u\|$$
   On conclut donc à l'égalité
   $$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$$
   ce qui conclut la preuve.

2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, bornée par M. Alors, on a
$$0 \leqslant \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{3^n}$$
par croissances comparées. Or, $\frac{\mathrm{M}}{3^n}$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison dans $]\,0\,;1\,[$) ; par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge donc absolument, donc converge.

3. Montrons tout d'abord que σ est bien une forme linéaire sur ℓ^∞. σ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors
$$\sigma(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda u_n + \mu v_n)}{3^n} = \lambda \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}\right) + \mu \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right) = \lambda\sigma(u) + \mu\sigma(v)$$
par linéarité de la somme d'une série (notons que cette égalité est justifiée par le fait que toutes les séries qui interviennent convergent bien d'après la question précédente). Ainsi, σ est linéaire, et σ est donc bien une forme linéaire.
Montrons maintenant que σ est continue. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Alors :
$$\left|\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{u_n}{3^n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{3^n}\right) \|u\|$$
Le terme de gauche de cette inégalité converge vers $|\,\sigma(u)\,|$, celui de droite converge également car la série de terme général $\frac{1}{3^n}$ converge, pour les mêmes raisons qu'à la question 2. Par conséquent, on peut passer à la limite lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$, et :
$$|\,\sigma(u)\,| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right) \|u\|$$
et d'après une caractérisation de la continuité des applications linéaires, cela montre que σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

4. Soit $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathrm{T}$. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{t_n}{3^n} \leqslant \frac{2}{3^n}$, donc
$$0 \leqslant \sigma(t) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$$
et cette dernière somme de série vaut 1 car, pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2}{3^n} = 2\frac{1 - 3^{-\mathrm{N}}}{2} \to 1$$
Donc $\sigma(t) \in [\,0\,;1\,]$.

5. On a
$$\sigma(\tau) = \frac{\tau_1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

et

$$\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Notamment, l'application σ n'est pas injective sur T.

6. Il s'agit de montrer que $t(x)$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, t_n(x)$ est un entier relatif comme différence d'entiers relatifs. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x$$

et

$$3^{n-1} x - 1 < \lfloor 3^{n-1} x \rfloor \leqslant 3^{n-1} x$$

d'où (à chaque fois on somme une inégalité large et une inégalité stricte, donc on a bien une inégalité stricte)

$$3^n x - 1 - 3(3^{n-1} x) = -1 < t_n(x) < 3^n x - 3(3^{n-1} x - 1) = 3$$

Et puisque $t_n(x)$ est entier, on a bien $t_n(x) \in \{0, 1, 2\}$. Donc $t(x) \in$ T.

7. Tout d'abord, $y_n - x_n = \frac{1}{3^n} \to 0$. De plus, pour $n \geqslant 2$,

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \frac{\lfloor 3^{n-1} x \rfloor}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x)}{3^n} \geqslant 0$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et, pour $n \geqslant 2$,

$$y_n - y_{n-1} = \frac{t_n(x)}{3^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x) - 2}{3^n} \leqslant 0$$

donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Puisqu'on a l'encadrement, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3^n x - 1 \leqslant \lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x$$

on a donc

$$1 - \frac{1}{3^n} \leqslant x_n \leqslant 1$$

et par théorème d'encadrement, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers x, et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de même puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par ailleurs, pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{t_n(x)}{3^n} = \frac{t_1(x)}{3} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} = \frac{\lfloor 3x \rfloor}{3} - \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (x_{n+1} - x_n) = x_1 - 0 + x_{\mathrm{N}+1} - x_1 = x_{\mathrm{N}+1}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n} = x$$

8. En appliquant la formule donnée par l'énoncé [1] :

```
def flotVersTern(n,x):
   T=[]
   for k in range(1,n+1):
       T.append(int(3**k*x)-3*int(3**(k-1)*x))
   return T
```

9. Il suffit ici de calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}$ sachant que les derniers termes sont nuls :

```
def ternVersFlot(l):
    x=0
    for k in range(len(l)):
        x+=l[k]/3**(k+1)
    return x
```

10. C'est un simple test :

```
def ajout(l):
    s=0
    for k in l:
        s+=k
    if s%2==0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(-2)
    return l
```

De même pour verif :

```
def verif(l):
    s=0
    for k in range(len(l)-1):
        s+=l[k]
    if s%2==0 and l[-1]==-1:
        return True
    if s%2==1 and l[-1]==-2:
        return True
    return False
```

On pouvait aussi remarquer que c'est correct si la somme de tous les termes est impaire :

1. Notons ici qu'il y a un problème de précision : les flottants ont une précision maximale, et l'entier peut quant à lui être arbitrairement grand. La fonction proposée ne peut structurellement qu'être une approximation de la représentation ternaire.

```
def verif(l):
   if l[-1]!=-1 and l[-1]!=-2:
       return False
   return sum(l)%2==1
```

Partie 2 : Étude d'une fonction définie par une série

11. Notons $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1+\sin(nx)}{3^n} \end{array}$.

— Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme composition, somme et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

— Comme sin varie entre -1 et 1, $\|f_n\|_\infty = \frac{2}{3^n}$. Par ailleurs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{2}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$). Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc simplement, sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ donc $\|f\|_\infty = \frac{n}{3^n}$. Or, $\frac{n}{3^n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série positive et convergente (c'est une série de Riemann d'exposant strictement plus grand que 1), par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n}{3^n}$ converge. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation d'une série, φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.

12. Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{inx}}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{3^n}$$

De même que dans la question 2, la série de fonctions $x \mapsto \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{3^n}$ converge donc simplement. Notamment, sa partie imaginaire converge simplement. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ (fixé pour le reste de la question) :

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$$

D'autre part, par le même calcul qu'à la question 4,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

On obtient donc bien

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n}=\frac{1}{2}+\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nx}}{3^n}\right)$$

Enfin, par somme d'une série géométrique convergente et de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nx}}{3^n}=\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}}{3\left(1-\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}}{3}\right)}=\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{3}\right)}{3\left(\left(1-\frac{\cos(x)}{3}\right)^2+\frac{\sin^2(x)}{9}\right)}=\frac{3\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}-1}{10-6\cos(x)}$$

On obtient donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$

13. La question 11 nous a permis de vérifier le théorème de dérivation d'une série de fonctions terme à terme. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n}$$

D'autre part, en dérivant à vue l'expression obtenue à la question précédente, on trouve que, pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x)=\frac{3\cos(x)(10-6\cos(x))-3\sin(x)6\sin(x)}{(10-6\cos(x))^2}=\frac{-18+30\cos(x)}{(10-6\cos(x))^2}$$

On en déduit donc que, pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n}=\frac{-18+30\cos(x)}{(10-6\cos(x))^2}$$

14. On a montré en question 11 que $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Cette série converge donc uniformément. Par ailleurs, les f_n, étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sont notamment continues sur $[0,\pi]$. Par théorème d'intégration d'une série terme à terme :

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{\pi}f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

donc

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{3^n}-\frac{\cos(nx)}{n3^n}\right]_0^{\pi}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{3^n}+\frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^n}\right)$$

Or, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{3^n}=\pi\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{\pi}{2}$ d'après la question 12, donc :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\varphi(x)-\frac{1}{2}}{3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}$$

Enfin, par développement en série entière, on a, pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, donc

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\ln(2)$$

15. Avec le changement de variable (licite, car de classe $\mathcal{C}^1$) $\left\{\begin{array}{l} u = \cos(x) \\ \mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$, on obtient que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-1}{10-6u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{6}\ln(10-6u)\right]_1^{-1} = \frac{1}{3}\ln(2)$$

Partie 3 : Développements ternaires aléatoires

16. Par construction, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $\mathrm{N} \geqslant 2$, $\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}$ est une variable aléatoire finie, donc X_N est une variable aléatoire finie comme somme (finie !) de telles variables aléatoires. X_N admet donc une espérance et une variance. Notons que

$$\mathbf{E}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}) = \frac{1}{\mathrm{N}}.0 + \frac{1}{\mathrm{N}}.1 + \left(1-\frac{2}{\mathrm{N}}\right)2 = 2 - \frac{3}{\mathrm{N}}$$

Donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathbf{E}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}})}{3^n} = \left(2-\frac{3}{\mathrm{N}}\right)\frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^\mathrm{N}}}{1-\frac{1}{3}}$$

Et finalement :

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \left(2-\frac{3}{\mathrm{N}}\right)\frac{3^\mathrm{N}-1}{2.3^\mathrm{N}}$$

Par ailleurs, comme les $\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}$ sont mutuellement indépendants, d'après le lemme des coalitions, les $\frac{\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}}{3^n}$ le sont aussi. Donc

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{V}\left(\frac{\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}}{3^n}\right)$$

Or, par formule de transfert, on a

$$\mathbf{E}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}^2) = \frac{1}{\mathrm{N}}.0 + \frac{1}{\mathrm{N}}.1 + \left(1-\frac{2}{\mathrm{N}}\right)4 = 4 - \frac{7}{\mathrm{N}}$$

Donc

$$\mathbf{V}(\mathrm{T}_{n,\mathrm{N}}) = 4 - \frac{7}{\mathrm{N}} - \left(2-\frac{3}{\mathrm{N}}\right)^2 = \frac{5}{\mathrm{N}} - \frac{9}{\mathrm{N}^2}$$

On a donc

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{3^{2n}}\left(\frac{5}{\mathrm{N}} - \frac{9}{\mathrm{N}^2}\right) = \frac{1}{9}\frac{1-\frac{1}{9^\mathrm{N}}}{1-\frac{1}{9}}\left(\frac{5}{\mathrm{N}} - \frac{9}{\mathrm{N}^2}\right)$$

Finalement :

$$\mathbf{V}(X_N) = \frac{9^N - 1}{8.9^N}\left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

17. Puisque X_N admet une variance (d'après la question 16), l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique, et

$$0 \leqslant \mathbf{P}(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_N)}{\varepsilon^2} = \frac{9^N - 1}{8.9^N\varepsilon^2}\left(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}\right)$$

L'inégalité de gauche étant due au fait qu'une probabilité est à valeurs dans $[0,1]$. Le terme de droite tend vers 0 (c'est le produit de $\frac{9^N-1}{8.9^N\varepsilon^2}$, qui est convergent donc borné, et d'une suite qui tend vers 0 comme différence de deux telles suites), donc, par encadrement :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}(|X_N - E(X_N)| \geqslant \varepsilon) = 0$$

18. La quantité $|\mathbf{E}(X_N) - 1|$ est une constante ; donc $\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ne peut valoir que 0 ou 1. Distinguons deux cas :

— Si $|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1$$

et on a alors bien (puisqu'une probabilité est majorée par 1)

$$\mathbf{P}(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

— Si $|\mathbf{E}(X_N) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Supposons que $|X_N - 1| \geqslant \varepsilon$. On a alors (par inégalité triangulaire)

$$\varepsilon \leqslant |X_N - 1| = |X_N - \mathbf{E}(X_N) + \mathbf{E}(X_N) - 1| \leqslant |X_N - \mathbf{E}(X_N)| + |\mathbf{E}(X_N) - 1| \leqslant |X_N - \mathbf{E}(X_N)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a montré l'inclusion d'événements

$$(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) \subset \left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et par croissance des probabilités, on a donc

$$\mathbf{P}(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbf{P}\left(|X_N - \mathbf{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $\mathbf{E}(\mathrm{X}_n) = \left(2 - \frac{3}{\mathrm{N}}\right) \frac{3^{\mathrm{N}}-1}{2.3^{\mathrm{N}}} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a, à partir d'un certain rang,

$$|\mathbf{E}(\mathrm{X}_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc, à partir d'un tel rang,

$$\mathbf{P}\left(|\mathbf{E}(\mathrm{X}_n) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Par ailleurs, d'après la question 17, on a

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathbf{P}\left(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - \mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

Puisque $\mathbf{P}(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - 1| \geqslant \varepsilon)$ est une suite positive majorée par une suite tendant vers 0, par encadrement, on en déduit finalement que

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathbf{P}(|\mathrm{X}_\mathrm{N} - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Partie 4 : Fonction de Cantor-Lebesgue

19. On a :

$$\forall x \in [0,1], f_0(x) = x$$

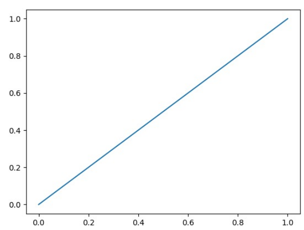
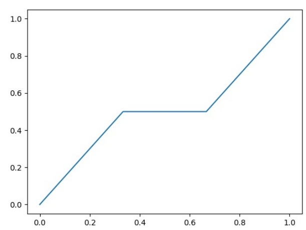
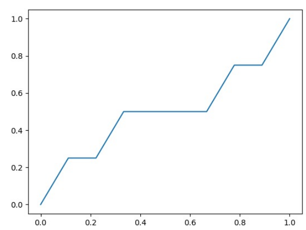
D'où l'on déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right],\ f_1(x) = \frac{3}{2}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[,\ f_1(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right],\ f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

puis que

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{1}{9}\right],\ f_2(x) = \frac{9}{4}x \\ \forall x \in \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[,\ f_2(x) = \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right],\ f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} \\ \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[,\ f_2(x) = \frac{1}{2} \\ \forall x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right],\ f_2(x) = \frac{9}{4}x - 1 \\ \forall x \in \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[,\ f_2(x) = \frac{3}{4} \\ \forall x \in \left[\frac{8}{9}, 1\right[,\ f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{5}{4} \end{cases}$$

On en déduit les graphiques respectifs de f_0, f_1 et f_2 :

20. Le programme se déduit directement de la définition :

```
def cantor(n,x):
    if n == 0:
        return x
    if x <= 1 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x) / 2
    if x >= 2 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x - 2) / 2 + 1 /2
    return 1 / 2
```

21. Montrons que la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \forall x \in [0,1], |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \tfrac{1}{3\times 2^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

— Tout d'abord :

- Si $x \in \left[\,0\,;\frac{1}{3}\,\right]$, alors
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{6}$$
- Si $x \in \left]\,\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,\right[$, alors $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a donc
$$|f_1(x) - f_0(x)| = x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
D'autre part, si $x < \frac{1}{2}$, on a
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2} - x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
- Si $x \in \left[\,\frac{2}{3}\,;1\,\right]$, alors
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\frac{1}{2} + \frac{3x-2}{2} - x\right| = \frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}(1-x) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

donc $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie.

— $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors :

- Si $x \in \left[\,0\,;\frac{1}{3}\,\right]$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3\times 2^{n+1}} = \frac{1}{3\times 2^{n+2}}$$
- Si $x \in \left]\,\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,\right[$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0$$
- Si $x \in \left[\,\frac{2}{3}\,;1\,\right]$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3\times 2^{n+1}} = \frac{1}{3\times 2^{n+2}}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion :d'après le principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$.

22. La série de terme général $\frac{1}{3\times 2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison dans $]\,0\,;1\,[$. D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum(f_{n+1}-f_n)$ converge donc normalement sur $[0,1]$, donc uniformément sur $[0,1]$. Par lien suite-série, la suite de fonctions $(f_n - f_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$, et il en va donc de même pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

23. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n)$: f_n est continue et croissante sur $[0,1]$, $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $f_0 = \mathrm{Id}$ qui est bien continue, croissante sur $[0,1]$, et vaut bien 0 en 0 et 1 en 1.

— $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$. Alors f_{n+1} est continue sur $\left[\,0\,;\frac{1}{3}\,\right], \left]\,\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,\right[$ et $\left[\,\frac{2}{3}\,;1\,\right]$ comme somme, quotient et composition de fonctions continues. Par ailleurs,

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{f_n(3x)}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x)$$

donc f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$. On montre de la même manière que f_{n+1} est continue en $\frac{2}{3}$. Donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.

Comme composée de fonctions croissantes, f_{n+1} est également croissante sur chacun des intervalles $\left[\,0\,;\frac{1}{3}\,\right]$ et $\left[\,\frac{2}{3}\,;1\,\right]$, et elle est constante donc croissante sur $\left[\,\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,\right]$. Comme cette croissance a lieu sur chaque intervalle fermé, on peut « recoller » cette croissance sur tout $[0,1]$ (par exemple si $x \in \left[\,0\,;\frac{1}{3}\,\right]$ et $y \in \left[\,\frac{2}{3}\,;1\,\right]$, on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant f_{n+1}(y)$).

Enfin, $f_{n+1}(0) = \frac{f_n(3\times 0)}{2} = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3\times 1-2)}{2} = 1$.

— Conclusion : par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$$

En passant à la limite en n, on trouve que pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

La fonction f est donc bien à valeurs dans $[0,1]$. Par ailleurs, si $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) \leqslant f_n(y)$$

et là encore, en passant à la limite en n, on obtient

$$f(x) \leqslant f(y)$$

La fonction f est donc croissante, et en passant à la limite dans les égalités $f_n(0)=0$ et $f_n(1)=1$, on obtient $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Puisque f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, elle est elle-même continue sur $[0,1]$. Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([\,0\,;1\,])$ est un intervalle contenant $f(0)=0$ et $f(1)=1$, donc il contient $[\,0\,;1\,]$, et f est donc surjective.