CCP 2011. Option MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

EXERCICE

Commutant d'une matrice

1. $\mathcal{C}(A)$ est clairement stable par addition et multiplication externe donc constitue un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\square$

2. Notons (C_1, C_2, C_3) les colonnes de A et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On constate que $C_1+C_2+C_3 = 3(e_1+e_2+e_3)$ donc 3 est valeur propre et $\varepsilon_1 = e_1+e_2+e_3$ est vecteur propre associé.
On peut ainsi factoriser $(X-3)$ dans le polynôme caractéristique et de fait il vient $\chi_A(X) = (X-3)(X-2)^2$.
Un calcul immédiat montre que le sous-espace propre associé à 2 est la droite dirigée par $\varepsilon_2 = 4e_1 + 3e_2 + 4e_3$
$\varepsilon_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ est tel que $A\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$ si et seulement $\begin{cases} -x+4y-2z = 4 \\ 4x-3z \quad = 3 \end{cases}$.
On peut donc par exemple choisir $\varepsilon_3 = -2e_1 - e_3$.
Ainsi $T = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\square$

3. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Un calcul immédiat montre que :
$MT = TM$ si et seulement si $m_{1,2} = m_{1,3} = m_{2,1} = m_{3,1} = m_{3,2} = 0$ et $m_{2,2} = m_{3,3}$.
Il en découle en notant $\big(E_{i,j}\big)$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que :
$\mathcal{C}(T) = \text{vect}\big(E_{1,1}, E_{2,3}, E_{2,2} + E_{3,3}\big)$. Cette famille étant libre clairement, $\mathcal{C}(T)$ est de dimension 3. $\square$

4. $\varphi : M \longmapsto P^{-1}MP$ est un clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et si M appartient à $\operatorname{Ker}\varphi$ alors $M = 0$ par multiplication à droite par P^{-1} et à gauche par P. Ainsi φ est un endorphisme injectif d'un espace de dimension finie donc est bien un automorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $\square$

On vérifie immédiatement que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\varphi(M) \in \mathcal{C}(T)$ i.e. si et seulement si $M \in \varphi^{-1}\big(\mathcal{C}(T)\big)$
Ainsi $\mathcal{C}(A) = \varphi^{-1}\big(\mathcal{C}(T)\big)$ est-il de dimension 3 puisque φ est un automorphisme. $\square$

5. D'une part le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique par le théorème de Cayley-Hamilton et d'autre part l'ensemble des racines du polynôme minimal est exactement égal à l'ensemble des valeurs propres.
Il en découle que $\pi_A(X) = (X-3)(X-2)$ ou $\pi_A(X) = (X-3)(X-2)^2$. La première possibilié est à exclure sinon A serait diagonalisable ce qui n'est pas puisque le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 1.
Ainsi $\pi_A(X) = (X-3)(X-2)^2$ et il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de degré au plus 2. $\square$

En d'autres termes la famille (Id, A, A^2) est libre. Donc $\text{vect}(\text{Id}, A, A^2)$ est de dimension 3 et est évidemment inclus dans $\mathcal{C}(A)$ puisque Id, A et A^2 commutent avec A. Donc $\mathcal{C}(A) = \text{vect}(\text{Id}, A, A^2) = \mathbb{R}_2[A]$ $\square$

Soit P un polynôme quelconque et $P = \pi_A Q + R$ la division euclidienne de P par $\pi_A = \chi_A$.Alors par le morphisme fondamental d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a $P(A) = \pi_A(A)Q(A) + R(A) = R(A)$ donc $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}_2[A] = \mathbb{R}[A]$$\square$

Ce résultat est évidemment faux pour toute matrice M : on a bien sûr toujours $\mathbb{R}[M] \subset \mathcal{C}(M)$ mais en général il n'y a pas égalité comme on le voit avec $M = \text{Id}$ car alors $\mathbb{R}[\text{Id}] = \text{vect}(\text{Id})$ alors que $\mathcal{C}(\text{Id}) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $\square$

PROBLÈME

Inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

1. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(.,.)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $S \in S_n$. Alors par théorème S est orthodiagonalisable donc il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de vecteurs propres de S. Il vient alors en notant $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de S et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ les composantes du vecteur x de composantes X dans la base canonique : ${}^tXSX = (X, SX) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2$.
Il en découle immédiatement que $S \in S_n^+$ (resp. $S \in S_n^{++}$) si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives (resp. strictement positives). $\square$

Partie I

2. Soit $S \in S_n^+$. On sait que $\det(S) = \prod\limits_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{tr}(S) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$. L'inégalité proposée n'est alors autre que l'inégalité rappelée dans l'énoncé : la moyenne arithmétique est inférieure ou égale à la moyenne géométrique. $\square$

3. Pour toute matrice M on a ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0$ donc ${}^tMM \in S_n^+$ $\square$

Par ailleurs en notant $N = {}^tMM$ il vient $n_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^n m_{k,i}m_{k,j}$ donc $\mathrm{tr}({}^tMM) = \sum\limits_{i=1}^n n_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^n \Big(\sum\limits_{k=1}^n m_{k,i}^2\Big)$.

L'inégalité précédente appliquée à $S = {}^tMM$ fournit donc bien $(\det M)^2 \leqslant \dfrac{1}{n^n}\Big(\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n m_{i,j}^2\Big)^n$ $\square$

Partie II : Théorème de réduction simultanée.

4.

(a) La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est A et est Id dans la base $\mathcal{B}'$. En notant R la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la formule de changement de base pour les formes bilinéaires symétriques fournit $\mathrm{Id} = {}^tRAR$ $\square$

(b) Comme B est symétrique il en va de même de $C = {}^tRBR$ qui est donc orthodiagonalisable pour le produit scalaire canonique d'où le résultat demandé. $\square$

(c) Il vient alors $B = ({}^tR)^{-1}CR^{-1} = {}^t(R^{-1})CR^{-1}$ et $C = {}^t(Q^{-1})DQ^{-1}$ donc $B = {}^tPDP$ avec $P = Q^{-1}R^{-1}$.
Or ${}^tPP = {}^t(R^{-1}){}^t(Q^{-1})Q^{-1}R^{-1} = {}^t(R^{-1})R^{-1}$ puisque Q est orthogonale. Donc ${}^tPP = A$ d'après (a).
Ainsi $P = Q^{-1}R^{-1} = {}^tQR^{-1}$ convient. $\square$

(d) Si q est la forme quadratique canoniquement attachée à B on a $q(x,y) = x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$. Donc la matrice de q dans la base (e_1+e_2, e_1-e_2) est $\mathrm{diag}(4,0)$ et ainsi ${}^tPBP = \mathrm{diag}(4,0)$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ non ortthogonale. $\square$

5.

(a) Si $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$ on peut utiliser le théorème de réduction simultanée établi ci-dessus.
Avec les notations de la question 4.(c), on a $\det A = (\det P)^2$ et $\det B = \det D \times (\det P)^2$.
De même $A + B = {}^tP(\mathrm{Id} + D)P$ donc $\det(A+B) = \det(\mathrm{Id}+D) \times (\det P)^2$.
Or comme en outre $B \in S_n^+$ on a $\det D = \prod\limits_{i=1}^n \lambda_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de B (voir 4.(b))donc sont positives. Donc en vertu de l'inégalité évidente signalée dans l'énoncé on a :
$\det(\mathrm{Id}+D) = \prod\limits_{i=1}^n (1+\lambda_i) \geqslant \Big(1 + \prod\limits_{i=1}^n \lambda_i\Big) = 1 + \det D$ donc l'inégalité proposée par produit par $(\det P)^2 > 0$. $\square$

(b) Supposons désormais que A et B appartiennent à S_n^+ mais pas à S_n^{++}. Alors $A+B$ est bien sûr symétrique et, pour tout X, on a ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$ donc $A + B \in S_n^+$ donc $\det(A+B) \geqslant 0$ puisque ses valeurs propres sont positives.
Or d'après la partie préliminaire 0 est valeur propre de A et de B sinon toutes les valeurs propres seraient strictement positives et A (ou B) serait définie positive. Donc $\det A + \det B = 0 + 0 = 0$ et l'inégalité est bien encore vraie. $\square$

6.

(a) Avec les notations de l'énoncé il vient :
$\det\big(tA + (1-t)B\big) = (\det P)^2 \times \det\big(t\mathrm{Id} + (1-t)B\big) = (\det P)^2 \times \prod\limits_{i=1}^n \big(t + (1-t)\lambda_i\big)$ $\square$

(b) Par concavité de la fonction ln on a pour $t \in [0,1]$ et $\lambda_i > 0$ ce qui est le cas pour les valeurs propres de B qui est définie positive : $\ln\big(t + (1-t)\lambda_i\big) \geqslant t\ln 1 + (1-t)\ln\lambda_i = (1-t)\ln\lambda_i$
Donc par croissance de la fonction exp il vient : $t + (1-t)\lambda_i \geqslant \lambda_i^{1-t}$ $\square$

(c) Ainsi $\det\big(tA + (1-t)B\big) = (\det P)^2 \times \Big(\prod\limits_{i=1}^n \lambda_i\Big)^{1-t} = (\det P^2)^t \times \Big((\det P)^2 \det D\Big)^{1-t} = (\det A)^t(\det B)^{1-t}$ $\square$

7.

(a) Soit $A \in S_n^+ \setminus S_n^{++}$ et soit $A_k = A + \dfrac{1}{k}\mathrm{Id}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Alors A_k est symétrique et définie positive car pour X non nul on a ${}^tXA_kX = {}^tXAX + \dfrac{1}{k}\|X\|^2 \geqslant \dfrac{1}{k}\|X\|^2 > 0$. En outre $A - A_k = \dfrac{1}{k}\mathrm{Id} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ $\square$

(b) Soient A, $B \in S_n^+$ et (A_k) et (B_k) deux suites d'éléments de S_n^{++} convergeant respectivement vers A et B.
Par résultat admis sur S_n^{++} on a $\Big(\det(A_k + B_k)\Big)^{1/n} \geqslant \Big(\det A_k\Big)^{1/n} + \Big(\det B_k\Big)^{1/n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Par continuité de la fonction $M \longmapsto \det M$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (fonction polynomiale des n^2 coefficients de M) et de la fonction $x \longmapsto x^{1/n}$ sur $[0, +\infty[$, on peut passer à la limite lorsque $k \to +\infty$ ce qui établit l'inégalité pour A et B. $\square$

Partie III : Théorème de Choleski.

8.

(a) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure (avec pour diagonale le "produit" des deux diagonales) et l'algorithme de la remontée prouve que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure l'est encore (avec sur sa diagonale l"'inverse"de la diagonale). Ce qui prouve bien que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ $\square$

Si T_1 et T_2 sont deux matrices triangulaires supérieures à diagonale strictement positive telles que ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$ alors $T_1T_2^{-1} = ({}^tT_1)^{-1}\,{}^tT_2 = {}^t(T_2T_1^{-1})$ ce qui prouve que $D = T_1T_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $D = {}^t(D^{-1})$ donc une matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telle que $\lambda_i = \lambda_i^{-1}$ donc $\lambda_i = 1$ car $\lambda_i > 0$. Ainsi $D = \mathrm{Id}$ et donc $T_1 = T_2$. $\square$

(b) On vérifie immédiatement que $A = {}^tTT$ où T est la matrice triangulaire supérieure telle que $t_{i,j} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. $\square$

Remarque : cela prouve que A est bien définie positive. En effet si une matrice A admet une décomposition de Choleski alors elle est bien symétrique et ${}^tXAX = \|TX\|^2 \geqslant 0$ et n'est nul que si $X = 0$ puisque T est inversible.

9. *Un peu d'informatique*

Soit $A \in S_n$. Alors A est symétrique définie positive si et seulement si (condition nécessaire admise - facile conséquence de l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt - et condition suffisante par la remarque ci-dessus) elle admet une décomposition de Choleski.
Pour $n = 3$ cela se traduit par le système ci-bas. Et alors $A \in S_3^{++}$ si et seulement si ce système st compatible dans $\mathbb{R}$ et les équations fournissent successivement $t_{1,1}$, $t_{1,2}$, $t_{1,3}$, $t_{2,2}$, $t_{2,3}$ et enfin $t_{3,3}$. L'algorithme i.e. la solution est indiquée à droite.

$$\begin{cases} t_{1,1}^2 & = a_{1,1} \\ t_{1,1}t_{1,2} & = a_{1,2} \\ t_{1,1}t_{1,3} & = a_{1,3} \\ t_{1,2}^2 + t_{2,2}^2 & = a_{2,2} \\ t_{1,2}t_{1,3} + t_{2,2}t_{2,3} & = a_{2,3} \\ t_{1,3}^2 + t_{2,3}^2 + t_{3,3}^2 & = a_{3,3} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} \\ t_{1,2} = a_{1,2}/t_{1,1} \\ t_{1,3} = a_{1,3}/t_{1,1} \\ t_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - t_{1,2}^2} \\ t_{2,3} = \big(a_{2,3} - t_{1,2}t_{1,3}\big)/t_{2,2} \\ t_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - t_{1,3}^2 - t_{2,3}^2} \end{cases}$$

Pour les 4 exemples proposés on trouve que le système est effectivement compatible ce qui prouve que les matrices sont bien définies positives et on obtient :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \square$$

10. *Inégalité d'Hadamard*

(a) Soit $S = {}^tTT \in S_n^{++}$. On a en particulier $s_{1,1} = t_{1,1}^2$ et $s_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{i} t_{k,i}^2$ donc $s_{i,i} \geqslant t_{i,i}^2$ pour tout i.

Il vient alors $\det S = (\det T)^2 = \prod\limits_{i=1}^{n} t_{i,i}^2 \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} s_{i,i}$. $\square$

(b) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $S = {}^tMM \in S_n^{++}$ et $s_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$.

Comme $\det S = (\det M)^2$ l'inégalité précédente fournit $\big|\det M\big| \leqslant \left(\prod\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}^2\Big)\right)^{1/2}$ $\square$

FIN