CCP MP MATHS 1, Mai 2012

Exercice 1 : Normes équivalentes

1. Soit f dans E. f est de classe C^1 sur $I=[0,1]$, donc $|f'|$ est continue sur I, et donc $\|f\|$ a bien un sens.
   * $\forall f,g\in E$, $\|f+g\| = |(f+g)(0)| + \displaystyle\int_0^1 |(f+g)'(t)|\,dt \leqslant |f(0)|+|g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|+|g'(t)|\ \ dt = \|f\|+\|g\|$.
   * $\forall f\in E, \forall\lambda\in\mathbb{R}, \|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |(\lambda f)'(t)|\,dt = |\lambda|\,|f(0)| + |\lambda|\int_0^1 |f'(t)|\,dt = |\lambda|\,\|f\|$
   * $\forall f\in E,\ \|f\|\geqslant 0$
   * $\forall f\in E,\ \|f\|=0 \Rightarrow |f(0)|=0$ et $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt=0$ car ces 2 nombres sont positifs et de somme nulle. Or $|f'|$ est continue et positive et d'intégrale nulle, donc $f'=0$, i.e. f est constante. Or $f(0)=0$, donc f est nulle.
   $\|\ \|$ est bien une norme sur E.

2. (i.) N_1 et N_2 sont des normes équivalentes sur E si et seulement si
   $$\exists a>0, \exists b>0 \text{ tq } \forall u\in E,\ aN_1(u)\leqslant N_2(u)\leqslant bN_1(u)$$
   (ii.) $\forall f\in E$, $\|f\| = |f(0)| + 2\displaystyle\int |f'| \leqslant 4\,|f(0)| + 2\int |f'| = 2\,\|f\|'$
   De même $\|f\|' = 2\,|f(0)| + \displaystyle\int |f'| \leqslant 2\,|f(0)| + 4\int |f'| = 2\,\|f\|$ Et donc
   $$\boxed{\forall f\in E,\ \frac{1}{2}\,\|f\|\leqslant \|f\|'\leqslant 2\,\|f\|.\text{ Les normes sont équivalentes.}}$$

3. Prenons la norme sur E définie par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$, et considérons la suite (f_n) de fonctions de E définie par $\forall x\in\mathbb{R}, f_n(x)=x^n$.
   $\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, qui converge vers 0 et $\|f_n\| = 0 + 2\displaystyle\int_0^1 f_n'(t)dt = 2(f_n(1)-f_n(0)) = 2$
   Il n'existe donc pas de réel $a>0$ tel que $\forall f\in E,\ a\,\|f\|\leqslant\|f\|_1$, ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 : Continuité d'une fonction définie par une intégrale

1. Cours :
   $$\left.\begin{array}{c} \forall x\in I, t\to g(x,t) \text{ est intégrable sur } J \\ \forall t\in J,\ x\to g(x,t) \text{ est continue sur } I \\ \exists\varphi\in\mathcal{CM}(J,\mathbb{R}^+) \text{ tq } \forall x\in I, \forall t\in J,\ |g(x,t)|\leqslant\varphi(t) \\ \text{avec } \varphi \text{ intégrable sur } J \end{array}\right\} \Rightarrow f : x\to \int_J g(x,t)dt \text{ est continue sur } I.$$

2. Soit $g:\mathbb{R}\times[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $g(x,t)=\dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$
   $\forall t\geqslant 0, x\to g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}, |g(x,t)|\leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$. Or la fonction $t\to\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R},\ t\to g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (majorée en valeur absolue par une fonction intégrable) et que l'hypothèse de domination est satisfaite avec la fonction $\varphi : t\to\dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$.
   Alors, par le théorème cité au dessus, la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$

3. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ xe^{-xt} \geqslant 0$. $\forall M > 0$, $\displaystyle\int_0^M xe^{-xt}dt = [-e^{-xt}]_{t=0}^M = 1 - e^{-xM}$. Et en faisant tendre M vers $+\infty$ on obtient : $\forall x > 0,\ f_2(x) = 1$ et $f_2(0) = 0$.

   La fonction f_2 n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $[0, +\infty[$.

   On vérifie ainsi que, sans l'hypothèse de domination, le théorème est faux : la fonction f de l'introduction peut ne pas être continue sur I.

Exercice 3 : Une intégrale curviligne

On paramètre le cercle γ par $x = \cos t$, $y = \sin t$ $t \in [0, 2\pi]$.

On obtient alors $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t(\cos t)]dt = \int_0^{2\pi} 1dt$

$$\boxed{\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi.}$$

On vérifie facilement que la forme différentielle est fermée, mais son intégrale sur le cercle fermé n'étant pas nulle, on prouve ainsi qu'elle n'est pas exacte.

Le théorème de Grenn-Riemann n'est pas applicable, car la forme différentielle n'est pas de classe C^1 sur un ouvert contenant le disque fermé : elle n'est pas définie ni prolongeable par continuité en 0.

Problème : Comparaison de convergences

Partie I

1. (a.)La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge sur $\mathbb{R}_+$, où $\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(x)| / x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.
   (*pour que cette définition ait un sens, il faut que les fonctions soient bornées sur I, de manière à pouvoir parler de la norme infinie*)

   (b.) $\forall x \in I,\ 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument

2. Pour x dans I notons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 indépendamment de x, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

3. Pour x fixé dans $I = [0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Le CSSA est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0,1]$.

   Le CSSA nous dit que, pour tout x de I, $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{x^2}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n}$.

   $\lim \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n} = 0$ donc la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$.

   Enfin, pour x fixé, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I.

4. Considérons la fonction f_n définie sur $I = [0,1[$ par $f_n(x) = x^n$. Pour x dans I, la série $\sum |f_n(x)| = \sum x^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-x}$. Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0,1[$.
Alors $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Montrons que cette suite de fonctions $(R_n(x))$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet $R_n(1-\dfrac{1}{n}) = n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = ne^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})} \sim \dfrac{n}{e}$ qui tend vers $+\infty$ avec n. Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0,1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I.

Partie II

5. La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.
Soit $x \in I$. La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0 \leqslant x < 1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$ converge (linéarité).
$\forall n \geqslant 1, \forall x \in I,\ 0 \leqslant \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_0(1-x)x^n$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.

6. (a.) $\forall x \in I,\ f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. En construisant le tableau de variations de f_n on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\dfrac{n}{n+1}$ qui vaut $f_n(\dfrac{n}{n+1}) = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
(b.) $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\alpha_n}{n}.\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.
Or $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, et $(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$. Donc $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$.
Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{\alpha_n}{ne}$; de plus $\|f_n\| \geqslant 0$ et donc, par comparaison de séries positives,
$$\boxed{\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \iff \sum \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$$

7. (a.) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.}$

(b.) On sait que la suite (α_n) décroît. Donc pour $k \geqslant n+1,\ \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.
Alors $\forall k \geqslant n+1,\ \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$, et donc par inégalités sur les séries convergentes,
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.$$
La suite des restes $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x)$ est donc positive et majorée par une suite qui ne dépend pas de x et qui converge vers 0 , ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

(c.) La suite (α_n) décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle. Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$.
Dans ces conditions pour tout x dans I, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$.

Mais alors, $R_n(1+\frac{1}{n+1}) \geqslant \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\dfrac{\ell}{e}$ (voir question 6.a.)donc ne converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I, si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

8. (a.) Avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, la question 6.b. montre que la série $\sum f_n$ converge normalement (car $\dfrac{\alpha_n}{n} = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge)

   (b.) Il suffit de prendre $\alpha_n = 1$: la suite est constante, donc elle décroît (au sens large), et elle ne converge pas vers 0. Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre $\alpha_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

   (c.) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_n$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge .

   La suite définie par $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient (elle est bien définie pour $n \geqslant 1$). Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge.

   La fonction $g : x \to \dfrac{2}{x\ln(x)}$ décroît sur $[2,+\infty[$ et est positive. La série $\sum_{n\geqslant 2} g(n)$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_2^{\infty} g(x)dx$. Or $\int_1^M g(x)dx = \int_1^M \dfrac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln x)]_2^M = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2)$ qui a pour limite $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$diverge, et donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. | |
   |---|
   | CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple ($\mathbb{R}$ est complet) |
   | CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple. |
   | Aucune des réciproques n'est vraie. Et de plus : |
   | CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme, et de même : CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue |

Gilbert Roux, MP Evry