CORRIGÉ de l'épreuve de MATHS 1 des ENSI - 2002 - Filière MP

Autour des produits infinis

I. Généralités et exemples

1. Supposons que le produit infini $\prod_{n\geq 0} u_n$ converge, donc que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie $\ell \neq 0$.

Alors nécessairement $u_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{P_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

2. On suppose que $\forall\, n \geq 0,\ u_n \neq 0$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

a. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \geq 0 \ /\ \forall\, n \geq n_0,\ 1-\varepsilon < u_n < 1+\varepsilon$.
En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient : $\exists\, n_0 \geq 0\ /\ \forall\, n \geq n_0,\ 0 < u_n$.

b. Posons $P'_n = \prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ pour $n \geq n_0$. Alors $\forall\, n \geq 0,\ P_n = \prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k = \prod\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k \times \prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k = P_{n_0-1} \times P'_n$.
Comme $P_{n_0-1} \neq 0$, les deux suites $(P_n)_{n\geq 0}$ et $(P'_n)_{n\geq n_0}$ sont de même nature, donc les produits infinis $\prod\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\prod\limits_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

3. On suppose que $\forall\, n \geq 0,\ u_n > 0$. On pose $S_n = \ln(P_n) = \sum\limits_{n=0}^{n} \ln u_k$. On a aussi $P_n = \mathrm{e}^{S_n}$.

a. $*$ Si le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie $\ell \neq 0$, donc $\ell > 0$ et en composant par la fonction logarithme continue sur $]0, +\infty[$, $S_n = \ln(P_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln \ell$, ce qui prouve que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln u_n$ converge.

$*$ Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln u_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ admet une limite finie L et en composant par la fonction exponentielle continue sur $\mathbf{R}$, $P_n = \mathrm{e}^{S_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^L \neq 0$, ce qui prouve que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

<u>Remarque importante</u> : dans ces conditions, $\ell = \mathrm{e}^L$ et $L = \ln \ell$, c'est à dire :

$$\boxed{\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(u_n)\right) \ \text{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(u_n) = \ln\Big(\prod_{n=0}^{+\infty} u_n\Big) \ \text{(II)}.}$$

b. $*$ Si le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge, alors d'après le **1**, nécessairement $\lim\limits_{n\to\infty}(1+u_n) = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
Ainsi $\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$. D'autre part, d'après le **3.**a, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge d'après le théorème de l'équivalent des séries à termes réels posififs.

$*$ Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, donc $\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$. Il en résulte que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge, donc d'après le **3.**a, le produit infini $\prod\limits_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.

c. Il suffit de reprendre la démonstration du **3.**b sachant que comme $0 < u_n < 1$, alors $1 - u_n > 0$.
Le théorème de l'équivalent des séries reste applicable car les deux suites équivalentes $\big(\ln(1-u_n)\big)_{n\geq 0}$ et $(-u_n)_{n\geq 0}$ sont de signe constant négatif.

4. Exemples numériques intervenant dans la suite du problème

a. $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{1}{4n^2}\Big)$ converge d'après le **3.**c en prenant $u_n = \dfrac{1}{4n^2}$ puisque $\forall\, n \geq 1,\ 0 < u_n < 1$.

b. $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big)$ converge de même en prenant ici $u_n = \dfrac{x^2}{n^2\pi^2} \in]0,1[$ puisque $|x| < \pi$.

c. $\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x > 0,\ u_n(x) = \big(1+\dfrac{x}{n}\big)\,\mathrm{e}^{\frac{-x}{n}} > 0$ et $\ln\big(u_n(x)\big) = -\dfrac{x}{n} + \ln\big(1+\dfrac{x}{n}\big) = O\big(\dfrac{x}{n^2}\big)$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\big(u_n(x)\big)$ converge. En appliquant le **3.**a, on en déduit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour tout $x > 0$.

5. *Application* : un peu d'histoire ...

a. D'après **3.**b, pour montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, il suffit de montrer que la produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\big(1+\frac{1}{n}\big)$ diverge.

Or ici $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n}\big(1+\frac{1}{k}\big) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

b. Pour $p \geq 2$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\Big(\frac{1}{p}\Big)^k$ de raison $\dfrac{1}{p}$ converge et a pour somme $\dfrac{p}{p-1}$.

c. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge revient d'après le **3.**c à montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{1}{p_n}\Big)$ diverge.

Or s'il convergeait, alors $P = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{p_n}\Big)}$ aurait une valeur finie, ce qui est contradictoire avec l'égalité $\displaystyle P = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

II. Développement euliérien du sinus et formule de Wallis

6. f_α étant paire, les coefficients $b_n(f_\alpha)$ sont nuls.

$\displaystyle\forall\, n \geq 0,\ a_n(f_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha t)\,\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big[\cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t\big]\,\mathrm{d}t,$

d'où $\displaystyle a_n(f_\alpha) = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n}\Big]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n} + \frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n}\Big],$

donc $\boxed{a_n(f_\alpha) = \dfrac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi}\,\dfrac{2\,\alpha}{\alpha^2-n^2}.}$

On remarque que f_α est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, donc le théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet s'applique (ainsi que le théorème de convergence normale d'ailleurs).

On a donc $\displaystyle\forall\, x \in \mathbf{R},\ f_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\Big[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(nx)\Big].$

En se plaçant en $x = \pi$, sachant que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, on obtient : $\displaystyle\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\Big[\frac{1}{\alpha\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,\alpha}{\alpha^2-n^2}\Big].$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\mathrm{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,\alpha}{\alpha^2-n^2}.}$

7. $0 < x < \pi$ et $g(0) = 0$ et $g(t) = \mathrm{cotan}\,t - \dfrac{1}{t}$ si $t \in]0,x]$.

a. Il est clair que g est déjà continue sur $]0,x]$ car $0 < x < \pi$.

$\forall t \in]0,x],\ g(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t\,\cos t - \sin t}{t\,\sin t} = \dfrac{t\left(1+o(t)\right) - \left(t + o(t^2)\right)}{t^2 + o(t^2)} = \dfrac{o(t^2)}{t^2+o(t^2)} = o(1)$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0$.
Ainsi $\underline{g \text{ est continue sur } [0,x]}$.

b. Si $0 < a < x < \pi$, alors $\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_a^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) - \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right)$.

Comme $\lim\limits_{a\to 0^+} \dfrac{\sin a}{a} = 1$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0^+} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).}$

L'identité : $\operatorname{cotan}(\alpha\pi) = \dfrac{1}{\alpha\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi\left(\alpha^2 - n^2\right)}$ valable pour $\alpha \in]0,\pi[$ donne en posant $t = \alpha\pi$:

$\forall t \in]0,\pi[,\ \operatorname{cotan} t - \dfrac{1}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,t}{t^2 - n^2\pi^2}$ et puisque $g(0) = 0$, $\boxed{\forall t \in [0,x],\ g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,t}{t^2 - n^2\pi^2}.}$

c. On pose $g_n(t) = \dfrac{2\,t}{t^2 - n^2\pi^2}$. On constate que $\forall n \geq 1,\ \left\|g_n\right\|_\infty^{([0,x])} = \dfrac{2\,x}{x^2 - n^2\pi^2} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, ce qui montre la convergence normale sur $[0,x]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$. On peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne :

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2\,t}{t^2 - n^2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\ln\left|t^2 - n^2\pi^2\right|\Big]_{t=0}^{t=x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\ln\left(n^2\pi^2 - x^2\right) - \ln(n^2\pi^2)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in]0,\pi[,\ \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).}$

En utilisant la formule (I) vue à la fin du **3.**a et compte-tenu de la convergence de l'exemple **4.b**, on a :
$\forall x \in]0,\pi[,\ \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \frac{\sin x}{x}.$
L'égalité précédente est encore valable pour $-\pi < x < 0$ par parité des deux membres et l'égalité suivante est encore valable en 0 :

$$\boxed{\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \text{ pour } x \in]-\pi,\pi[.}$$

8. *Application* : pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\boxed{\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{4\,n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.}$

III. Formule de Weiesrtrass et constante d'Euler

9. Il s'agit d'une question de cours sur la fonction Gamma d'Euler (*points faciles à gagner*).

Voir le corrigé dans le cours. On trouve que $\underline{\Gamma(1) = 1}$ et que $\underline{\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t}$.

10. On remarque que f_n est continue en n, donc continue sur $]0,+\infty($.

a. On rappelle que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$. Si $t \in]0,n[$, alors $1 - \dfrac{1}{n} > 0$ et $-\dfrac{1}{n} > -1$, donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \leq -\dfrac{1}{n}$.
On a donc pour $0 < t < n$, $f_n(t) = \mathrm{e}^{n\,\ln(1-t/n)} \leq \mathrm{e}^{n\,(-t/n)} \leq \mathrm{e}^{-t}$.
Comme $f_n(t) = 0$ si $t \geq n$, on obtient : $\forall n \geq 1,\ \forall t > 0,\ \underline{0 \leq f_n(t) \leq \mathrm{e}^{-t}}$.

b. Soit $x > 0$ fixé. Posons $g_n(t) = f_n(t)\,t^{x-1}$ pour $t > 0$ et $n \geq 1$.
$*$ chaque g_n est <u>continue</u> sur $]0,+\infty[$.
$*$ la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ <u>converge simplement</u> sur $]0,+\infty[$ vers $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$.
En effet soit $t > 0$ fixé. Pour $n > \lceil t \rceil$, $g_n(t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{n\,\ln(1-t/n)} = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{n\,\left[-t/n + o(1/n)\right]} = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{o(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(t)$.

$*$ les g_n sont positives et majorées par g intégrable sur $]0,+\infty[$ (cf. définition de $\Gamma(x)$).

On vient de vérifier les hypothèses permettant d'appliquer le théorème de la convergence dominée.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.

11. L'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n\, u^{x-1}\,\mathrm{d}u$ est impropre en 0, mais convergente car $1-x<1$.

a. Effectuons une intégration par parties sur $[a,1]$ d'abord avec $0<a<1$.

On prend $\varphi(u)=(1-u)^n$ et $\psi'(u)=u^{x-1}$, d'où $\varphi'(u)=-n\,(1-u)^{n-1}$ et $\psi(u)=\dfrac{u^x}{x}$.

Alors $\displaystyle\int_a^1 (1-u)^n\,u^{x-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{a^x}{x}(1-a)^n + \frac{n}{x}\int_a^1 (1-u)^{n-1}\,u^x\,\mathrm{d}u \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,u^x\,\mathrm{d}u$ car $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} a^x = 0$.

Ainsi $\boxed{I_n(x) = \dfrac{n}{x}\, I_{n-1}(x+1).}$

b. Pour $y>0$, $I_0(y) = \displaystyle\int_0^1 u^{y-1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^y}{y}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{y}$. et $I_n(x) = \dfrac{n}{x}\times\dfrac{n-1}{x+1}\times\cdots\times I_0(x+n) = \boxed{\dfrac{n!}{x\,(x+1)\ldots(x+n)}}.$

c. $\forall x>0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \overset{t=nu}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-u)^n\,(nu)^{x-1}\,n\,\mathrm{d}u = \lim_{n\to\infty} n^x\, I_n(x) = \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}}.$

12. *Application* :

a. Si $x\in]0,1[$, alors $1-x\in]0,1[$, donc $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\,n^x\,n^{1-x}}{\prod_{k=0}^n (x+k)\,(1-x+k)}$.

Or $\displaystyle\prod_{k=0}^n (x+k)\,(1-x+k) = \prod_{k=0}^n (x+k)\prod_{k=1}^{n+1}(k-x) = x\,(n+1-x)\prod_{k=1}^n (k^2-x^2) = x\,(n+1-x)\,(n!)^2\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$,

Ainsi $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-x}{n}\,x\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \boxed{x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).}$

b. En prenant $t=\pi x$ dans l'égalité : $\sin t = t\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ obtenue au **7.**c pour $t\in]0,\pi[$, on trouve que :

pour $x\in]0,1[$, $\sin(\pi x) = \pi x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$.

Donc la formule des compléments est : $\boxed{\forall x\in]0,1[,\ \dfrac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}.}$

c. Pour $x=\dfrac{1}{2}$, on obtient : $\dfrac{1}{\left(\Gamma(1/2)\right)^2} = \dfrac{1}{\pi}$, donc $\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.}$

Donc $\sqrt{\pi} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, d'où $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$ (intégrale de Gauss)

13. Ici $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

a. $u_n = \ln n - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n} = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Graphiquement, u_k représente l'aire d'un triangle curviligne situé sous la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{t}$ entre les deux droites d'équation $t = k-1$ et $t = k$. Si on translate horizontalement tous ces triangles pour les amener entre les deux droites d'équation $t = 0$ et $t = 1$, on constate qu'ils sont tous contenus dans le carré $[0,1] \times [0,1]$, ce qui montre que la suite croissante $n \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est majorée par 1, donc est convergente.

b. La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est de même nature que série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(v_n - v_{n-1})$ qui est convergente.

En effet : $v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = -u_n$.

14. On a vu au **11.**c que $\forall x > 0,\ \dfrac{1}{\Gamma(x)} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ avec $\varphi_n(x) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!\, n^x}$.

Or $\varphi_n(x) = \dfrac{x}{n^x} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x\, \mathrm{e}^{-x \ln n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x\, \mathrm{e}^{-v_n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathrm{e}^{\frac{-x}{n}}$.

La convergence vers γ de la suite $(v_n)_n$, la continuité de l'exponentielle et la convergence du produit infini du **4.**c permettent de déduire que :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \frac{1}{\Gamma(x)} = x\, \mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{\frac{-x}{n}}.}$$

15. *Application*

a. $\forall x > 0,\ \ln\bigl(\Gamma(x)\bigr) = -\ln x - \gamma x - \ln\left(\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{-x}{n}}\right) = -\ln x - \gamma x - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{-x}{n}}\right)$ en utilisant l'égalité (II) obtenue au **3.**a.

Donc $\ln\bigl(\Gamma(x)\bigr) = -\ln x - \gamma x + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$ avec $w_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ (III).

. Chaque w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$.

. la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n$ converge simplement sur $]0,1]$.

. la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w'_n$ converge uniformément sur $]0,1]$.

En effet $\forall x \in]0,1],\ w'_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n\,(n+x)} \leq \dfrac{1}{n^2}$, d'où la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w'_n$ sur $]0,1]$.

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut dériver terme à terme dans (III) et on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n\,(n+x)}.}$$

b. On a vu que $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$. L'intégrale demandée est donc égale à $\Gamma'(1)$.

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Donc $\dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -1 - \gamma + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = -\gamma$.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \ln(t)\, \mathrm{d}t = -\gamma.}$

Fin du corrigé