Chapitre 14
Fonctions de plusieurs variables

Résoudre une équations aux dérivées partielles

Il n'y a pas de méthode générale de résolution pour les équations aux dérivées partielles. On utilise souvent des changements de variable qui sont donnés dans les énoncés. Nous allons traiter plusieurs exemples.

Exemple 1 (Transformation affine).
On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

On utilise le changement de variable

$$(u, v) = (x + y, x - y) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right).$$

D'après les théorèmes de compositions, la fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(u, v) = f\Big(\underbrace{\frac{u + v}{2}}_{x}, \underbrace{\frac{u - v}{2}}_{y}\Big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{1}{2}f(x, y) = \frac{1}{2}F(u, v).\end{aligned}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 en u que l'on sait résoudre. On en déduit qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \qquad F(u, v) = h(v) \exp\left(\frac{u}{2}\right).$$

Finalement, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = h(x - y) \exp\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Exemple 2 (Passage en coordonnées polaires).
On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On passe en coordonnées polaires $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. La fonction

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad F(r, \theta) = f(\underbrace{r\cos(\theta)}_{x}, \underbrace{r\sin(\theta)}_{y})$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ d'après les théorèmes de compositions, et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta)\\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\\ &= \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = 0.\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une fonction $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad F(r, \theta) = g(\theta).$$

Comme $\theta = \text{Arctan}(y/x)$, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = g\left(\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

Dans ce cas, on peut encore simplifier la forme générale de la solution. En notant $h = g \circ \text{Arctan} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$, on trouve que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Exemple 3 (Une équation aux dérivées partielles d'ordre 2**).**
On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On utilise le changement de variable $(u, v) = (x, x + y)$ qui équivaut à la relation$(x, y) = (u, v - u)$. D'après les théorèmes de compositions, la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $F(u, v) = f(u, v - u)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

En recommençant, on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi la dérivée seconde en F par rapport à u est nulle, donc F est un polynôme de degré 1 en la variable u. On en déduit qu'il existe deux fonctions $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = h(v)u + k(v).$$

Finalement, on obtient

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = h(x + y)x + k(x + y).$$

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions.

Résolution d'un système

On fixe deux intervalles ouverts non-vide I et J de $\mathbb{R}$, ainsi que deux fonctions $g : I \times J \to \mathbb{R}$ et $h : I \times J \to \mathbb{R}$ continues. On cherche les fonctions $f : I \times J \to \mathbb{R}$ de classes $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h.$$

Méthode de résolution du système

1) On résout la première équation en prenant une primitive par rapport à x.
2) On remplace l'expression obtenue dans la seconde équation.
3) On en déduit l'ensemble des solutions

Remarque 1
Si les fonctions g et h sont de classes $\mathscr{C}^1$ et si le système admet une solution, on a nécessairement d'après le théorème de Schwartz

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Si cette relation n'est pas vérifiée, le système n'a pas de solution. Ainsi, dans le cas où g et h sont de classes $\mathscr{C}^1$, on commencera par vérifier que l'on a cette relation avant d'employer la méthode ci-dessus.

Exemple 4
On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy^2.$$

Les fonctions $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données par $g(x,y) = x^2 y$ et $h(x,y) = xy^2$ sont de classes $\mathscr{C}^1$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq \frac{\partial h}{\partial x}.$$

On conclut que le système n'a pas de solution.

Exemple 5
On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y.$$

Les fonctions $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = xy^2$ et $h(x,y) = x^2 y$ sont de classes $\mathscr{C}^1$ et on a la relation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

D'après la première équation, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + K(y)$$

où $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. En substituant dans la seconde équation, on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 y + K'(y) = x^2 y,$$

donc $K' = 0$. Ainsi, la fonction K est constante. Finalement, les solutions du système sont les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

Extremums d'une fonction de deux variables

On se donne une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où Ω est une partie non-vide de $\mathbb{R}^2$ fermée et bornée. Comme la fonction f est continue sur la partie fermée et bornée Ω, on sait que la fonction f admet un maximum et un minimum sur Ω. Remarquons que par définition, on peut écrire

$$\Omega = U \cup \partial\Omega$$

où U est l'ensemble des points intérieurs de Ω.

Méthode pour trouver les extremums d'une fonction

1) On vérifie que U est un ouvert, puis on détermine les possibles extremums locaux de l'application $f : U \to \mathbb{R}$ en recherchant les points critiques de f dans U.
2) On détermine les extremums de l'application $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ en se ramenant à l'étude de fonctions à une variable.
3) On conclut en comparant les différentes valeurs trouvées.

Exemple 6
On souhaite déterminer le maximum de $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

La fonction f est continue sur la partie $[0,1]^2$ qui est fermée et bornée, donc f admet un maximum sur $[0,1]^2$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert

$U =]0,1[^2$. Les points critiques de f sur U sont les solutions de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1-2xy-x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} & = & 0 \\ \dfrac{1-2xy-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2} & = & 0. \end{array}\right.$$

Seul le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ est solution, donc c'est le seul point critique de f sur U. La valeur de f en ce point est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Les points de $\partial\Omega$ s'écrivent sous la forme

$$(0,t), \quad (t,0), \quad (1,t) \quad \text{ou} \quad (t,1) \qquad \text{avec} \qquad t \in [0,1].$$

Les valeurs prises par f sur $\partial\Omega$ sont donc les valeurs prises sur $[0,1]$ par les fonctions $h_1, h_2, h_3, h_4 : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$h_1(t) = f(0,t), \quad h_2(t) = f(t,0), \quad h_3(t) = f(1,t) \qquad \text{et} \qquad h_4(t) = f(t,1).$$

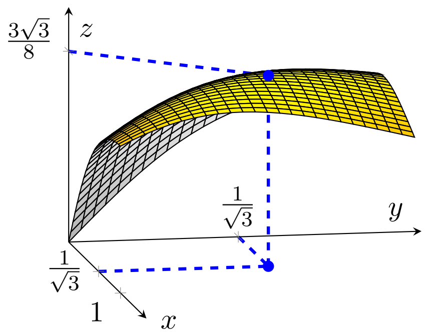
A l'aide d'études de fonctions on montre que le maximum des fonctions $h_1 = h_2$ et $h_3 = h_4$ sont atteins respectivement en $t = 1$ et $t = \sqrt{2} - 1$, et on a

$$h_1(1) = h_2(1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad h_3\left(\sqrt{2}-1\right) = h_4\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{4}.$$

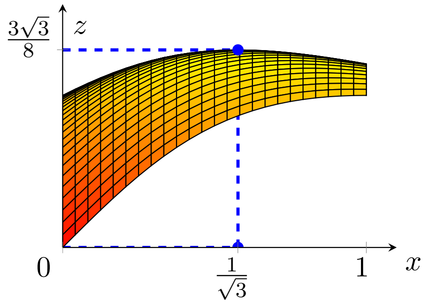
On conclut que le maximum de f sur $[0,1]^2$ est

$$\max\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad \text{qui est atteint en} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Illustration 1
Voici le graphique de la fonction f sous deux angles différents.



Graphe de la fonction f



Graphe de la fonction f