# Chapitre 13
# Équations différentielles

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

## Équation différentielle scalaire d'ordre 2

Dans cette partie, on fixe un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et des fonction continues $a, b, c : I \to \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaires scalaires d'ordre 2

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t). \qquad (E)$$

Il n'y a pas de méthode générale permettant de résoudre l'équation $(E)$.

### Méthode de la variation de la constante

Rappelons que l'équation homogène associée à $(E)$ est l'équation

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \qquad (H)$$

On peut appliquer cette méthode pour résoudre $(E)$ si l'on connait une solution de $(H)$ qui ne s'annule pas sur $I$.

**Méthode : la variation de constante**

Supposons que l'on a une solution $h : I \to \mathbb{K}$ de $(H)$ qui ne s'annule pas sur $I$.

1) On définit $\lambda : I \to \mathbb{R}$ qui est deux fois dérivable par la relation $y = \lambda h$.
2) On remplace $y = \lambda h$ dans l'équation $(E)$. On obtient

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \lambda'' h + 2\lambda' h' + \lambda h'' + a(t)(\lambda' h + \lambda h') + b(t)\lambda h = c(t)\\ &\Leftrightarrow h\lambda'' + (2h' + a(t)h)\lambda' + \underbrace{(h'' + a(t)h' + b(t)h)}_{0 \text{ car } h \text{ est solution de } (H)} \lambda = c(t)\\ &\Leftrightarrow h\lambda'' + (2h' + a(t)h)\lambda' = c(t)\end{aligned}$$

3) En posant $\mu = \lambda'$, on doit donc résoudre l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1
$$h\mu' + (2h' + a(t)h)\mu = c(t).$$
On en déduit $\lambda'$, puis $\lambda$, puis $y$ en utilisant la relation $y = \lambda h$.

**Exemple 1**

Nous allons résoudre sur $I = ]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = t \quad \Leftrightarrow \quad t^2y'' - 3ty' + 4y = t^3. \qquad (E)$$

On remarque que $h : t \mapsto t^2$ est solution de l'équation homogène

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0 \qquad (H).$$

Comme $h$ ne s'annule pas sur $I$, on peut donc appliquer la méthode de la variation de la constante pour en déduire toutes les solutions de $(E)$. On remplace $y = \lambda h$ dans $(E)$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivables

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow t^2(\lambda'' h + 2\lambda' h' + \lambda h'') - 3t(\lambda' h + \lambda h') + 4\lambda h = t^3\\ &\Leftrightarrow t^2h\lambda'' + (2t^2h' - 3th)\lambda' + \underbrace{(t^2h'' - 3th' + 4h)}_{0 \text{ car } h \text{ est solution de } (H)} \lambda = t^3\\ &\Leftrightarrow t^4\lambda'' + (4t^3 - 3t^3)\lambda' = t^3\\ &\Leftrightarrow t\lambda'' + \lambda' = 1.\end{aligned}$$

En notant $\mu = \lambda'$ et en résolvant l'équation différentielle $t\mu' + \mu = 1$, on obtient

$$\lambda'(t) = \mu(t) = \frac{A}{t} + 1 \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

En prenant les primitives de cette égalité, on trouve

$$\lambda(t) = A\ln(t) + t + B \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, on en déduit les solutions $y$ de $(E)$

$$y(t) = t^2\lambda(t) = At^2\ln(t) + Bt^2 + t^3 \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

## Recherche d'une solution polynômiale

On peut essayer de déterminer les solutions de $(E)$ sous forme d'une fonction polynomiale.

**Méthode : recherche d'une solution polynomiale**

1) On commence par déterminer les degrés possibles pour le polynôme.
2) On substitue dans l'équation $(E)$ et on identifie les coefficients.

**Exemple 2**

Cherchons les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$t(t+1)y'' + (t-1)y' - y = 0. \qquad (E)$$

Supposons qu'il existe une fonction polynomiale $P$ de degré $n \in \mathbb{N}$ solution de $(E)$. Si l'on note $a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$ le terme dominant de $P$, alors le coefficient dominant du polynôme

$$t(t+1)P'' + (t-1)P' - P \quad \text{est} \quad (n(n-1) + n - 1)a_n t^n.$$

Comme $P$ est solution de $(E)$, on obtient donc

$$n(n-1) + n - 1 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow n = 1.$$

Ainsi, $P$ est de degré 1, donc il s'écrit $P(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. En substituant dans $(E)$, on obtient

$$(t-1)a - (at + b) = 0 \Leftrightarrow b = -a.$$

Ainsi les solutions polynomiales de $(E)$ sont les fonctions

$$P(t) = a(t-1) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 1**

En général, il est possible que l'équation différentielle n'admette pas de solution polynomiale.

## Recherche d'une solution sous forme de série entière

On peut essayer de déterminer les solutions de $(E)$ sous forme d'une série entière.

**Méthode : recherche d'une solution sous forme de série entière**

On raisonne par analyse et synthèse.

1. Analyse : On suppose qu'il existe une solution $y$ de $(E)$ sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0$

$$\forall t \in ]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

2. En substituant $y(t)$ dans $(E)$, on détermine une relation de récurrence pour les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Si possible, on détermine une expression explicite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $y$.
4. Synthèse : On considère la fonction donnée par la série entière avec l'expression que l'on a déterminé pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'analyse.
   a) Si le rayon de convergence de la série entière obtenue est nul, alors il n'y a pas de solution de $(E)$ développable en série entière.
   b) Si le rayon de convergence $R$ de la série entière est non nul, alors $y$ est une solution de $(E)$ développable en série entière sur $]-R, R[$.

**Exemple 3**

Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$y'' + 2ty' + 2y = 0. \qquad (E)$$

Analyse : On suppose qu'il existe une solution $y$ de $(E)$ sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0$

$$\forall t \in ]-R, R[, \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans $(E)$, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 2t\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.$$

En effectuant un changement d'indice dans la première somme, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n+2)a_n\right] t^n = 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit la relation

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n+2)a_n = 0 \\ \Leftrightarrow \ &\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{2}{n+2}a_n. \end{aligned}$$

On remarque que l'on a l'expression explicite suivante

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}a_1.$$

On en déduit que si $y$ est solution de $(E)$, alors

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!}t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1} \\ &= a_0 \exp(-t^2) + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1}. \end{aligned}$$

Synthèse : les deux séries entières ci-dessus ont pour rayon de convergence $+\infty$. Ainsi, les solutions de $(E)$ développable en série entière sont les fonctions

$$y(t) = A\exp(-t^2) + B\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1} \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Dans ce cas, on sait d'après le cours que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. On peut donc même en déduire qu'il n'y a pas d'autre solution à l'équation différentielle $(E)$ que celles ci-dessus.

**Exemple 4**

Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$t^2 y' + (t-1)y = 1. \qquad (E)$$

Analyse : On suppose qu'il existe une solution $y$ de $(E)$ sous la forme d'une série entière admettant un rayon de convergence $R > 0$

$$\forall t \in ]-R, R[, \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans $(E)$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1.$$

En effectuant un changement d'indice dans la première somme, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n-1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 1 \Leftrightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n a_{n-1} - a_n\right] t^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit la relation

$$\begin{aligned} & a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n a_{n-1} - a_n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n a_{n-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $a_n = n!$, donc si $y$ est solution de $(E)$, alors

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n! t^n.$$

Synthèse : le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est 0. Ainsi l'équation différentielle $(E)$ n'admet pas de solution développable en série entière.

# Systèmes différentiels linéaires

## Résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère un système différentiel donné sous forme matriciel

$$X' = AX. \qquad (S)$$

**Méthode : résoudre un système différentiel linéaire**

1) On commence par réduire la matrice $A$ (éventuellement sur $\mathbb{C}$ si ses valeurs propres ne sont pas réelles). On détermine une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale ou triangulaire supérieure.
2) En remplaçant dans le système, on obtient

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PTP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = TP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = TY$$

en posant $Y = P^{-1}X$.
3) On détermine les solutions $Y$ du système différentiel $Y' = TY$.
4) En écrivant $X = PY$, on en déduit les solutions de $(S)$.
5) Si l'on a des solutions complexes et que l'on veut obtenir les solutions réelles, on remplace les éléments de la base des solutions complexes qui sont conjugués par leur partie réelle et imaginaire.

**Remarque 2**

Il n'y a pas besoin de calculer $P^{-1}$ pour appliquer la méthode !

**Exemple 5**

Résolvons le système différentiel sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}. \qquad (S)$$

En réduisant $A$ sur $\mathbb{C}$, on trouve

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ 0 & 2-2i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-2i & 1+2i \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient que $Y$ est solution du système différentiel

$$Y' = DY \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & (2+2i)u \\ v' & = & (2-2i)v \end{array} \right. \quad \text{si} \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $u(t) = \lambda e^{(2+2i)t}$ et $v(t) = \mu e^{(2-2i)t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{(2+2i)t} \\ \mu e^{(2-2i)t} \end{pmatrix}.$$

En substituant dans $X = PY$, on trouve les solutions complexes de $(S)$

$$X(t) = \lambda \underbrace{e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \mu \underbrace{e^{(2-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}}_{X_2(t)} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Une base des solutions complexes de $(S)$ est $(X_1, X_2)$. Les éléments $X_1$ et $X_2$ sont conjugués, donc pour obtenir les solutions réelles, on les remplace par leur partie partie réelle et imaginaire. Dans ce cas, on a

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix} + ie^{2t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix},$$

donc les solutions réelles de $(S)$ sont

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

**Exemple 6**

Résolvons le système différentiel sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3x - y \\ y' & = & x + y \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}. \qquad (S)$$

La matrice $A$ n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable.

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient que $Y$ est solution du système différentiel

$$Y' = TY \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & 2u + v \\ v' & = & 2v \end{array} \right. \quad \text{si} \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $v(t) = \mu e^{2t}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, puis que $u$ est solution de l'équation différentielle linéaire

$$u' - 2u = \mu e^{2t}.$$

Après résolution, on trouve $u(t) = (\lambda + \mu t)e^{2t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu t)e^{2t} \\ \mu e^{2t} \end{pmatrix}.$$

En substituant dans $X = PY$, on trouve les solutions du système $(S)$

$$X(t) = (\lambda + \mu t)e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

ce que l'on peut réécrire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\lambda e^{2t} + \mu e^{2t}(2t+1) \\ y(t) & = & 2\lambda e^{2t} + \mu e^{2t}(2t-1) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$