TSI2 Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques 2016/2017 - J. Aurouet

Feuille de TD 8

Exercice 1 : Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales. Décrire l'endomorphisme isométrique associé.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $e_1 + e_2$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F la plan vectoriel défini par l'équation $x + y + z = 0$.
1) Déterminer une base orthonormée de F.
2) Déterminer $F^{\perp}$ et en donner une base orthonormée.
3) Déterminer le projeté orthogonal sur F du vecteur $a = (1, 2, 5)$.
4) Soit p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
5) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 4 : Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équation $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
1) Déterminer la matrices de la projection orthogonale sur P dans la base canonique.
2) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à P dans la base canonique.
3) Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Exercice 5 : Pour chacun des matrices symétriques réelles suivantes, préciser une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que la matrice soit égale à PD^tP.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^m = I_n$, montrer que $B^2 = I_n$.

Exercice 7 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. En interprétant A comme la matrice de passage de la base canonique vers une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ puis en orthonormalisant cette dernière, montrer qu'il existe deux matrices $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = QT$.

Exercice 8 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique. Montrer que $\exp(M)$ est une matrice orthogonale.