TSI2 — Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques — 2016/2017 - J. Aurouet

Feuille de TD 5

Exercice 1 : Continuité.

1) Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

2) Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On pose $h := \max(f,g)$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Que dire d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont les valeurs sont dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 2 : Calcul de primitives.

1) Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{x^4 - x^2 - 2}, \quad \frac{x+1}{(x^2+1)^2}, \quad \frac{x^2}{x^6-1}, \quad \frac{1}{x(x^2+1)^2}$$

2) De même en utilisant les règles de Bioche :

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 2\tan^2(x)}, \quad \frac{\sin(x)}{\cos^3(x) + \sin^3(x)}, \quad \frac{1}{\sin(x) + \cos(x) + 2}$$

Exercice 3 : Donner une relation de récurrence permettant de calculer les intégrales suivantes.

$$\textbf{a)}\ \ I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)dx, \qquad \textbf{b)}\ \ J_n = \int_1^e \ln^n(x)dx$$

Exercice 4 : Convergence. Déterminer la nature de chacune des intégrales suivantes.

$$\int_0^1 \frac{ch(t) - \cos(t)}{t^{5/2}}dt, \quad \int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt \quad \alpha > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}dt, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 5 :

Soit $f\ :\ [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$$

converge.

1) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt$$

converge et calculer sa valeur.

2) Soient a et b deux nombres strictement positifs. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$$

3) En déduire la valeur de

$$\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln(t)}dt$$

Exercice 6 : Calcul intégral !

Étudier la nature de chacune des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx,\quad \int_0^1 \arctan(\sqrt{1-x^2})dx,\quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt \quad n\in\mathbb{N},\quad \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}dx$$