TSI2 | Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques | 2016/2017 - J. Aurouet

# Feuille de TD 3

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

**Exercice 1 :** Montrer que dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les familles suivantes sont libres :

**a)** $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, où $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(\lambda x)$.

**b)** $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, où $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(\lambda x)$.

**c)** $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, où $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x-\lambda|$.

**Exercice 2 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

**1)** Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $E_1$, $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
a) A-t-on toujours $f(E_1+E_2) = f(E_1)+f(E_2)$ ?
b) A-t-on toujours $E_1 \oplus E_2 \Rightarrow f(E_1) \oplus f(E_2)$ ?
Sinon, trouver une condition sur $f$ pour que la propriété soit réalisée.

**2)** Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Montrer que :

$$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$$

**3)** Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que $f \circ g = \tilde{0}$ et $(f+g)$ inversible. Montrer que :

$$rg(f) + rg(g) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

**4)** Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que $f \circ g = \tilde{0}$ et $(f+g)$ inversible. Montrer que :

$$rg(f \circ g) \leq \min(rg(f), rg(g))$$

**5)** Montrer que $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ est paire si et seulement si il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tel que $Im(f) = Ker(f)$.

**6)** Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
On suppose que $E = Im(f) + Im(g) = Ker(f) + Ker(g)$. Monter que $E = Im(f) \oplus Im(g) = Ker(f) \oplus Ker(g)$.

**Exercice 3 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. On suppose que tout vecteur de $E$ est transformé par $f$ en un vecteur qui lui est proportionnel. Montrer que $f$ est une homothétie.

**Exercice 4 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. On suppose que $f^3 = Id$.

**1)** Montrer que $Im(f - Id) \subset Ker(f^2 + f + Id)$.

**2)** Montrer que $E = Im(f - Id) \oplus Ker(f - Id)$.

**Exercice 5 :**

$$\text{Soit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Calculer} \quad A^n.$$

**Exercice 6 :** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n, \quad \text{Calculer} \lim_{n \to +\infty} A^n.$$

**Exercice 7 :** Déterminer toutes les formes linéaires $\varphi$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

**Exercice 8 : Matrices diagonalement dominantes (à connaître).**

On considère une matrice $A = (a_{ij})_{A \leq i,j \leq n}$ telle que :

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{1 \leq j \leq n, i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Montrer que $A$ est inversible.

**Exercices supplémentaires :**

Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?

---

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n$. Une famille $\mathcal{E}$ d'élément de $E$ est dite positivement génératrice si tout élément de $E$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ d'éléments de $\mathcal{E}$.

Quel est le cardinal minimal d'une famille positivement génératrice ?

---

Soient, $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que : $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathcal{L}(G, F)$ tel que $\varphi = \theta \circ \psi$.

---

Soient $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\varphi_1$,...,$\varphi_p$ des éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, on note $\phi$ l'application de $E$ dans $\mathbb{K}^p$ définie par $\phi(x) = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$.

Montrer que $\phi$ est surjective si et seulement si $(\varphi_1, ... \varphi_p)$ est libre.

*Indication : Pour la réciproque, on pourra raisonner par l'absurde et considérer un hyperplan qui contient $\mathcal{I}m(\phi)$.*