

Feuille de TD 15

Exercice 1 : Courbes fermées. Étudier les courbes paramétrées définies par les paramétrages suivants :

a) $\gamma(t) = \left(\cos(t), \sin\left(\frac{t}{3}\right) \right)$ b) $\gamma(t) = \left(\sin(t), \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} \right)$

c) $\gamma(t) = (\sin(t) + \cos(t), \sin^2(t))$ c) $\gamma(t) = (\sin^3(t), \cos(3t))$

d) $\gamma(t) = (4 \cos^2(t) \sin^3(t), (3 - 2 \cos^2(t)) \cos^2(t))$

Exercice 2 : Étudier localement les courbes paramétrées définies par les paramétrages suivants :

1) Lorsque t tend vers 1 :

$$\gamma(t) = (1 + t(t - 2)(t - 1)^3, -1 + (t^2 - 2t + 5)(t - 1)^3)$$

2) Lorsque t tend vers 0 :

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sin^3(t)}{1 + t}, (1 + t)(\operatorname{sh}(t) - \sin(t)) \right)$$

3) Lorsque t tend vers 1 :

$$\gamma(t) = \left(t(3 - 2t)(t - 1)^2, t - 1 + \frac{1}{t} \right)$$

4) Lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\gamma(t) = \left(-2 + \frac{2t^2 + 4t + 3}{(t + 1)^7}, 1 - \frac{3t^2 + 6t + 5}{(t + 1)^7} \right)$$

Exercice 3 : Courbes avec point singulier. Étudier les courbes paramétrées définies par les paramétrages suivants :

a) $\gamma(t) = (\cos^2(t) + \ln(|\sin(t)|), \sin(t) \cos(t))$ b) $\gamma(t) = \left(\sin(t), \frac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)} \right)$

Exercice 4 : Courbes à asymptotes. Étudier les courbes paramétrées définies par les paramétrages suivants :

a) $\gamma(t) = \left(\tan\left(\frac{t}{3}\right), \sin(t) \right)$ **b)** $\gamma(t) = \left(t^2 - \frac{2}{t}, t^2 + \frac{16}{t} \right)$

c) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2}{1-t} \right)$ **d)** $\gamma(t) = (\ln(|t|), \ln(|t(t+1)|))$

Exercice 5 : Longueurs d'arcs. Déterminer la longueur :

1) d'un cercle de rayon R .

2) de l'arche de cycloïde :

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = R(1 - \cos(\theta)) \end{cases} \quad \theta \in [0; 2\pi]$$

3) de l'astroïde :

$$\begin{cases} x(\theta) = R \cos(\theta)^3 \\ y(\theta) = R \sin(\theta)^3 \end{cases}$$

4) de la courbe définie par

$$\gamma(t) = (2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t)).$$

Exercice 6 : Longueur d'un arc de courbe représentative. Déterminer la longueur :

1) de l'arc de courbe d'équation $y = e^x$ pour $0 \leq x \leq 1$.

2) de l'arc de courbe d'équation $y = x^{3/2}$ pour $1 \leq x \leq 3$.

3) de l'arc de chaînette d'équation $y = ch(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$.

4) de l'arc de courbe d'équation $y = \ln(x)$ pour $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

5) de l'arc de courbe d'équation $y = \arcsin(e^{-x})$ pour $0 \leq x \leq 1$.