TSI2 Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques 2015/2016 - J. Aurouet

Feuille de TD 12

Exercice 1 : Bien aimé. On jette 3600 fois un dé parfait. Minorer la probabilité que le nombre d'apparition du 1 soit compris strictement entre 480 et 720.

Exercice 2 : Le concierge. Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait pas laquelle.
1) Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2) En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 3 : Vaches laitières. Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étble de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.

Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyse réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.
1) Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0,85)^n$.
2) Étudier la fonction $f : x \mapsto ax + \ln(x)$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3) Monter que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée.

Exercice 4 : Pièce de monnaie.
Partie A) On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir "pile" soit $0,3$.
1) On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2) On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on de lancers en moyenne ?
Partie B) Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la pobabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.
1) Déterminer la loi de X.
2) Monter que X admet une espérance et la calculer.

3) On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y la numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4) On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 5 : Un problème chinois. On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfant d'un couple et p la proportion de garçon.
1) Déteminer p en fonction de X.
2) Donner la loi de la variable aléatoire X.
3) Que vaut l'espérance de p ? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6 : Une rampe de spots. Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3 et S_4, change d'état de la manière suivante :
- à l'instant $t = 0$ le spot S_1 est allumé.
- si, à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n+1$, ceci de manière équiprobable.
- si, à l'instant $t = n, n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n+1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.
1) Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste allumé jusqu'à l'instant n.
2) Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
3) Calculer la probabilité des événements, $(X = n)$ pour $n \geq 3$.
4) Déterminer l'espérance de X.

Exercice 7 : Service de dépannage. Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de $0,25$.
1) Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.

a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, et sa variance.

b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".

2) Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.

a) Exprimer la probabilité conditionnelle de "$Z = k$" sachant "$Y = n$".

b) En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".

c) Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.

3) En 2014, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exercice 8 : Chaîne de fabrication. On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment de l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit pas la chaîne A soit défectueux est de $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est $0,2$.

1) On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement : "L'objet provient de la chaîne A".

2) On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produit par la chaîne A en une heure.

a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de son espérance et de sa variance.

b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Y=n}(X = k) = P(X = k|Y = n)$ (on distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$ que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.