TSI2 Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques 2016/2017 - J. Aurouet

Feuille de TD 11

Exercice 1 : Dénombrements.
A) Calculer la probabilité pour qu'en répartissant r boules dans n cellules, toutes les cellules soit occupées.
B) De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre ?
C) On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de SI. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :
 1) si les livres doivent être regroupés par matières.
 2) si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 2 : Indépendance.
A) On fait rouler quatre dés à 6 faces au hasard et on considère les évènements suivants :
 A = le premier dé tombe sur une face impaire
 B = le deuxième dé amène une face impaire
 C = la somme des valeurs des faces des deux dés est impaire
 Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.
B) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les évènements :
 A = tirage d'un nombre pair
 B = tirage d'un multiple de 3.
 1) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
 2) Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.
C) On suppose qu'on a un espace probabilisé tel que l'univers Ω est un ensemble fini de cardinal un nombre premier p, et que la situation est équiprobable. Prouver que deux évènements non triviaux ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 3 : Probabilités conditionnelles.
A) Une population comporte 60% de femmes et 40% d'hommes. On sait par ailleurs que 10% des hommes ont les cheveux longs et que 40% des femmes ont les cheveux courts. Une personne se présente avec les cheveux longs. Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme ?
B) Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour la correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?
C) Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de 1/2. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

D) Une usine fabrique des pièces, avec une proportion 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité :

1) qu'il y ait une erreur de contrôle ?

2) qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 4 : Variable aléatoire.

A) Andy est un ivrogne : quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même ; et s'il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre. On relève son état d'ivresse pendant 400 jours sachant qu'au jour 0 il était ivre. On note X le nombre de jours où il était sobre, et X_i la variable qui vaut 1 si Andy est sobre le i-ième jour et 0 sinon.

1) Exprimer X en fonction des X_i.

2) Soit $p_i = P(X_i = 1)$. Montrer la relation $p_i = -\frac{1}{3}p_{i-1} + \frac{1}{3}$.

3) En déduire la loi des X_i, puis calculer $E(X)$.

B) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

C) Soit $(X_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de n^2 variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, P). On suppose que ces variables aléatoires sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et suivent toutes une loi uniforme, autrement dit pour tout i, j, $P(X_{ij} = 1) = P(X_{ij} = -1) = 1/2$. On note M la matrice $M = (X_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Quelle est l'espérance du déterminant de M ?

Exercice 5 : Couples de variables aléatoires.

A) On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans la boîte. Soit X le numéro de la boîte, et Y la numéro de la boule.

1) Déterminer la loi du couple (X, Y).

2) Déterminer la loi de Y et son espérance.

3) Les variables aléatoires de X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X = Y)$.

B) Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1) Déterminer la loi du couple (X, Y).

2) En déduire la loi de Y.

C) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi est définie par :

$P(X = -2) = P(X = 0) = P(X = 2) = 1/6$

et $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/4$.

On considère la variable $Y = X^2$.

1) Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).

2) X et Y sont-elle indépendantes ?

3) Calculer $Cov(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Ce matin là, Monsieur Martin, philosophe à ses heures, avait entrepris, compte tenu des prévisions météorologiques pessimistes, de se rendre à son travail en voiture et avait eu la bonne idée de proposer à son voisin, l'ingénieur Félicien Optimal de l'emmener.

Hélas, bientôt pris dans des encombrements désespérants, ils durent se résoudre à engager les plaisirs de la conversation ce qui leur donna l'occasion de mieux se connaître.

M.Martin expliqua qu'il avait trois enfants dont un prénommé Jacques et un autre Paul.

"N'avez-vous pas aussi une fille ?" demanda Félicien. "D'ailleurs, je n'ai qu'une chance sur quatre de me tromper".

M.Martin continua son propos qui fit apparaître que l'aîné des enfants était justement Jacques.

"Je pense encore que vous avez une fille, reprit Félicien, mais j'ai maintenant une chance sur trois de me tromper.

- Puisque cela vous intéresse, je puis vous donner une autre indication, dit Monsieur Martin : mon benjamin est Paul.

- Alors, répondit Félicien, je ne sais plus du tout si vous avez une fille ou non !"

Cette démonstration de rationalisme laissa notre philosophe un peu perplexe : il ne lui apparaissait pas clair en effet que les informations successives qu'il avait données avaient pu augmenter l'incertitude de son voisin Félicien. Ces informations étaient-elles des connaissances ou des anti-connaissances ? Il s'engagea alors dans une méditation sur le réel et aboutit à la conclusion que puisque effectivement le cadet de ses enfants était une fille, la première impression de Félicien avait été la bonne.

(d'après N.Bouleau : Probabilités pour l'ingénieur, Hermann)