Chapitre 14
Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 : Soient $a, b > 0$. On définit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{x^2+y^2}.$$

Pour quelles valeurs de (a,b) la fonction f admet-elle une limite en $(0,0)$?

Exercice 2 : On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 4 : On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y).$$

1. Démontrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$
2. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial u}$.
3. Conclure.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\forall t > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. On suppose que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$
2. Démontrer la réciproque.

Exercice 7 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (2x+y, 3x+y)$.

Exercice 8 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (x+y, 2x+3y)$.

Exercice 9 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 10 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 11 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u, v) = (x + y, x - y)$.

Exercice 12 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$(i)\ \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & ye^{xy}+3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & xe^{xy}. \end{array}\right. \qquad (ii)\ \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & e^{x}y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & e^{x}+2y. \end{array}\right.$$

$$(iii)\ \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \sin(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \cos(xy). \end{array}\right. \qquad (iv)\ \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & e^{x}+y\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x\cos(xy). \end{array}\right.$$

Exercice 13 : Déterminer les extremums de $f : T \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

avec $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$.

Exercice 14 : Déterminer les extremums de $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

Exercice 15 : Déterminer les extremums de $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = x - y + x^3 + y^3.$$

Exercice 16 : Déterminer les extremums de $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 17 : Déterminer les extremums de $f : D \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

Exercice 18 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$?