Révisions d'algèbre linéaire

1 Espaces vectoriels

1.1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 : Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de F.

Exercice 2 : Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = y + z + t = 0\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Donner une base de F.

Exercice 3 : Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

1.2 Bases

Exercice 4 : La famille

$$\mathscr{F} = \Big((1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, -1), (0, 1, 1, 1) \Big)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 5 : Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la famille

$$\mathscr{F}_a = \Big((1, -1, 0), (2, -1, 2), (1, 0, a) \Big)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6 : Montrer que la famille $\mathscr{F} = \Big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2) \Big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Décomposer le polynôme 1 dans cette base.

1.3 Applications linéaires

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 8 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(P) = P(0) + P(1).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2 Matrices

2.1 Généralités

Exercice 10 : Déterminer l'inverse des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la puissance n-ième de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Matrice d'une application linéaire

Exercice 14 : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ donné par $u(P) = P'$.

Exercice 15 : On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ donnée par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) = P + P'(X+1).$$

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer la matrice M de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Montrer que M est inversible. Que peut-on en déduire pour u ?
4. Calculer $\mathrm{Ker}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
5. Calculer $\mathrm{Im}(M - \mathrm{I}_4)$. En déduire $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 16 : Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme donné par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) = (x - 2y, x + 4y).$$

1. Donner la matrice de u dans la base canonique $\mathscr{C}$.
2. Donner la matrice de u dans la base $\mathscr{B} = \big((2, -1), (1, -1)\big)$.
3. En déduire la matrice de u^n dans la base canonique pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17 : Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = i + k$, $v = i + j$ et $w = i + j + k$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.