# Sommaire



IL s'agit de généraliser la notion d'intégrale sur un intervalle quelconque, c'est à dire aux cas où

- $f$ est continue, en général non bornée, sur un intervalle borné du type $[a, b[$ ou $]a, b]$, ou bien
- $f$ est continue sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.

Sauf indication particulière, on appellera I un intervalle de l'un des quatre types précédents. On écrira les théorèmes pour $\mathrm{I} = [a, b[$ ou $\mathrm{I} = [a, +\infty[$. Dans les autres cas, on adaptera les énoncés des théorèmes, ce qui est toujours facile.

La figure 1, ci-dessous, représente le cas où $b$ est fini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».

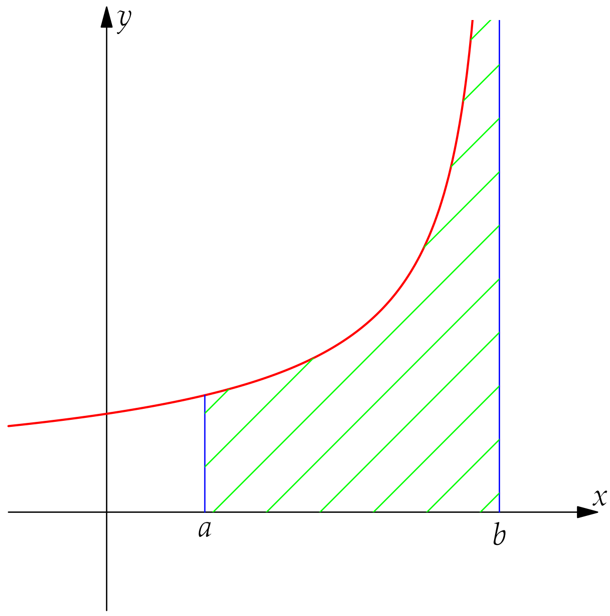


Figure 1 – **Intégrale généralisée en un point fini**

La figure 2, page suivante, représente le cas où on est à l'infini et où la fonction est positive. Le problème est de savoir si l'aire hachurée est « finie ».

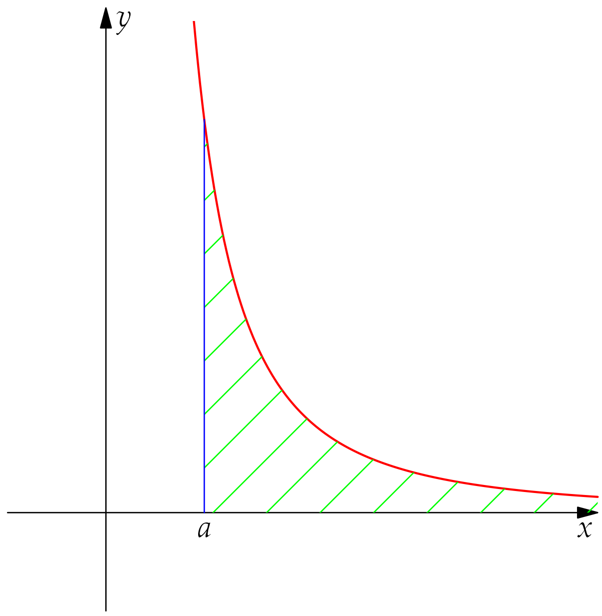


FIGURE 2 – **Intégrale généralisée à l'infini**

# 1. Nature d'une intégrale impropre

## 1.1. Intégrale convergente

**Définition :** Soit $f$ continue sur $[a, b[$.
On dit l'intégrale de $f$ sur $[a, b[$ **converge** ou **existe** $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to b^-} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (au sens de limite finie).
On note cette limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui est **nouvelle** notation.

Notons que cette nouvelle notation est parfaitement compatible avec l'ancienne, il suffit de regarder ce qui se passe quand $f$ est continue sur $[a, b]$.

**Définition :** Soit $f$ continue sur $[a, +\infty[$.
On dit l'intégrale de $f$ sur $[a, +\infty[$ **converge** ou **existe**

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe (au sens de limite finie).}$$

On note cette limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui est **nouvelle** notation.

**Définition :** Quand une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.
La nature d'une intégrale généralisée est le fait qu'elle converge ou qu'elle diverge.

Quand on a une intégrale, il nous faut maintenant déterminer, au départ, s'il s'agit d'une intégrale simple ou d'une intégrale généralisée.
- A une borne infinie, c'est toujours une intégrale généralisée.
- A une borne finie, il faut regarder au moins si la fonction est définie, ou pas.

Dans le cas où les théorèmes qui suivent se révèlent inapplicables ou difficiles à appliquer, on peut **toujours essayer** de travailler en primitive, sans bornes aux intégrales, et calculer au bout du compte les limites de ces primitives... Cela est même quelquefois indispensable, en particulier avec les intégrations par parties. Après tout, on ne fait alors que revenir à la définition qu'on vient de donner.

## 1.2. Exemples fondamentaux

**Théorème :** (Riemann)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

On a la même chose en un point $a$ :

$$\int_a^b \frac{1}{|t-a|^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

**Théorème :** (Riemann)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

**Théorème :** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**Théorème :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

**Démonstration :** On cherche pour chacune de ces fonctions une primitive, ce qui est facile. On cherche ensuite à quelle condition cette primitive a une limite finie à la borne considérée. ■

## 1.3. Limite d'une application et convergence de son intégrale

### a/ Limite finie en un point fini : faux problème

**Théorème :** $f$ continue sur $[a, b[$, borné, telle que $f$ est prolongeable par continuité en $b$, c'est à dire telle que $f$ a une limite finie en $b^-$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**Démonstration :** $f$ est prolongeable par continuité en $b^-$, on note $\widetilde{f}$ la prolongée sur $[a, b]$, pour $x \in ]a, b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ qui tend vers l'intégrale simple $\displaystyle\int_a^b \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ par continuité de la primitive.

Ce qui prouve que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. ■

**Exemple :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

### b/ Limite non nulle à l'infini

**Théorème :** Soit $f$ continue sur $[a, +\infty[$, on a alors :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) \quad \textbf{existe} \text{ et est } \textbf{non nulle} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge}$$

**Démonstration :** Si la limite est finie et non nulle, le critère d'équivalence entre fonctions de signe constant donne le résultat.
Si la limite est infinie, la fonction est de signe constant et sa valeur absolue est plus grande que 1 dont l'intégrale diverge. ■

### c/ Autres cas

Dans **tous les autres cas**, on veillera donc à ne pas confondre :
- la convergence de la **fonction** au point considéré, et
- la convergence de son **intégrale.**

Les deux notions sont **indépendantes**... comme le prouve le tableau de la présente page :

TABLE 1 – **Limite d'une fonction et convergence de son intégrale**

| Intégrale | Singularité | Limite de la fonction | Convergence de l'intégrale |
|---|---|---|---|
| $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ | $+\infty$ | 0 | oui |
| $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ | $+\infty$ | 0 | non |
| $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ | 0 | $+\infty$ | oui |
| $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ | 0 | $+\infty$ | non |

## 1.4. Relation de Chasles des intégrales convergentes

**Théorème :**
$f$ continue sur $[a, b[$ avec $c \in ]a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature,

et, **si elles convergent**, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

**Démonstration :** Il suffit d'écrire la relation de Chasles pour les intégrales simples entre $a$ et $x$ et de passer à la limite quand $x \to b^-$ ■

On a bien sûr le même théorème sur tous les autres types d'intervalles.

## 1.5. Cas de problème aux deux bornes

Il se peut que l'intégrale soit généralisée aux 2 bornes. Il faut traiter une borne à la fois. On coupe l'intégrale en 2 arbitrairement en un point $c$.
On dira que l'intégrale converge $\Leftrightarrow$ chacune des 2 intégrales converge.
Par exemple $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

## 1.6. Linéarité des intégrales convergentes

**Théorème :** $f, g$ dont les intégrales convergent sur I, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors
$\lambda.f + \mu.g$ a une intégrale convergente sur I et : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} (\lambda.f + \mu.g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_{\mathrm{I}} g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Démonstration :** C'est un simple passage à la limite sur les primitives ■

## 1.7. Positivité et croissance

**Théorème :** Soit $f$, continue par morceaux et positive sur I, c'est à dire que $\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \geqslant 0$, telle que son intégrale converge sur I, alors, $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

**Théorème :** Soit $f$ et $g$, continues par morceaux sur I, dont les intégrales convergent sur I, telles que $\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \leqslant g(t)$, alors, $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\mathrm{I}} g(t)\,\mathrm{d}t$

## 1.8. Changement de variable

**Théorème :** $\beta$ étant une borne finie ou $+\infty$,

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur I} \\ \varphi \text{ monotone, bijective, de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\alpha, \beta[ \\ \varphi([\alpha, \beta[) \subset \mathrm{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u \text{ sont de}$$

même nature,
et **si elles convergent** : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u$

> Ce théorème est à utiliser avec soin. La rédaction se fait **toujours** en deux temps
> - une partie sur la nature des intégrales et
> - en cas de convergence, l'égalité proprement dite.

> Le changement de variable est donc $u = \varphi(t)$ dont on vérifiera qu'il est bien monotone de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle de variation de $t$.

**Démonstration :** On a toujours : $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u$
Ce sont deux fonctions continues de $x$ et égales.
Elles ont donc toutes les deux une limite finie ou pas de limite finie quand $x \to \beta$.
Dans le cas où elles ont une limite finie, par passage à la limite, on a l'égalité annoncée. ■

Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en intégrale généralisée et vice-versa. Dans ce cas, **à condition de le remarquer**, il n'y a pas de problème d'intégrabilité.
Regardons par exemple $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$ pour lequel $u = \tan\frac{t}{2}$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ldots \mathrm{d}u$.

**Exemple :** On va déterminer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t$.

La fonction $t \to \sin\left(e^t\right)$ est continue, donc continue sur $[0,+\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en $+\infty$.
On va montrer la convergence de cette intégrale au moyen d'un changement de variable : on pose $u = e^t$ qui est bien **monotone de classe $\mathscr{C}^1$**, $\sin\left(e^t\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.
Par ailleurs, on a montré que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t$ converge.

### 1.9. Travail en primitives

On peut, au besoin, **se passer du théorème** de changement de variable dans les intégrales généralisées en travaillant en **primitives**.
On revient alors aussi à la définition de la convergence d'une intégrale généralisée par limite finie d'une primitive...

## 2. Intégrale des fonctions positives

Ce sont bien sûr des fonctions à valeurs réelles.

### 2.1. Critère de comparaison

**Théorème :** $\forall t \in [a,b[,\quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

**Théorème :** $\forall t \in [a,+\infty[,\quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

**Démonstration :** A chaque fois, seule la première assertion est à montrer. Soit F et G les primitives de $f$ et $g$ qui s'annulent en $a$.
On a G qui est croissante majorée car l'intégrale de $g$ converge.
D'autre part, en tout point $t$ de I, $\mathrm{F}(t) \leqslant \mathrm{G}(t)$ et F est aussi croissante.
Ceci prouve que F est croissante majorée et donc converge. Enfin, l'intégrale de $f$ converge sur I. ■

**Exemple :** On va déterminer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \to \dfrac{\sin^2 t}{1+t^2}$ est continue, donc continue sur $[0,+\infty[$ . On a un problème de convergence, ou une singularité, en $+\infty$.
Par ailleurs, elle est **positive** et on va montrer la convergence de l'intégrale en utilisant le critère de comparaison : $\forall t \in [0,+\infty[\,,\ 0 \leqslant \dfrac{\sin^2 t}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge par existence d'une limite finie à la primitive $\arctan t$ en $+\infty$.
Ceci prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

### 2.2. Critère d'équivalence

**Théorème :**
$$\left.\begin{array}{r} f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant au voisinage de } b^- \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

**Théorème :**
$$\left.\begin{array}{r} f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t) \\ f(t) \text{ de signe constant au vois. de } +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

**Démonstration :** Compte tenu de l'équivalence,
il existe $a'$ tel que sur $[a',b[$ (ou sur $[a',+\infty[$), on a $\frac{1}{2}g(t) \leqslant f(t) \leqslant 2g(t)$.
Le caractère local de la convergence d'une intégrale, le critère de comparaison et la linéarité fournissent le résultat. ∎

**Exemple :** On va déterminer la convergence de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \to \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}$ est continue, donc continue sur $]0,1]$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en $0$.
Par ailleurs, elle est **positive** et on va montrer la convergence de l'intégrale en utilisant le critère d'équivalence :
$\dfrac{\sin\sqrt{t}}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge par existence d'une limite finie à la primitive $2\sqrt{t}$ en $0$.
Ceci prouve que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

## 3. Intégrabilité sur un intervalle

### 3.1. Intégrabilité sur I

**Définition :** Une fonction $f$, continue sur un intervalle I, est **intégrable** sur I si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

**Exemple :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t$ converge, donc $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

On ne mélangera donc pas ces deux notions :
- l'intégrale de $f$ converge sur I ;
- $f$ est intégrable sur I.

### 3.2. L'intégrabilité entraîne la convergence de l'intégrale

On va ici relier les deux notions précédentes !

**Théorème :** $f$ intégrable sur I, alors l'intégrale de $f$ converge sur I et : $\left|\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$

**Démonstration :** On va le montrer pour une fonction qui est à priori à valeurs complexes.
- Comme $|\mathrm{Re}\, f| \leqslant |f|$ et $|\mathrm{Im}\, f| \leqslant |f|$, par linéarité, il suffit de le montrer pour les fonctions à valeurs réelles.
- Pour $f$ à valeurs réelles, on note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$.
  Ce sont deux fonctions positives, $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$, dont l'intégrale converge par majoration.
  Et comme $f = f_+ - f_-$, on obtient par linéarité l'intégrale de $f$ qui converge sur I.

■

### 3.3. Théorème de la fonction nulle

**Théorème :** $$\left.\begin{array}{r} f \textbf{ continue et intégrable} \text{ sur } [a, b[ \\ \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall t \in [a, b[\,, \quad f(t) = 0$$

$b$ peut être une borne finie ou $+\infty$, on a bien sûr le même théorème sur $]a, b]$, que $a$ soit fini ou $-\infty$.

On utilise souvent ce théorème, par exemple quand on a un produit scalaire défini par une intégrale, pour montrer la dernière propriété.

### 3.4. Un procédé de convergence

- Si on a $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$,
  et donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
- Si on a $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors $|f(t)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$,
  et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

Ceci n'est pas un théorème, il faut à chaque fois refaire la démonstration...

On se sert souvent de ce procédé quand on a des « mélanges » de logarithmes, de fonctions puissances et d'exponentielles...

**Exemple :** On va déterminer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \to \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. On a un problème de convergence, ou une singularité, en 0 et en $+\infty$.

En 0, $\sqrt{t}\left|\dfrac{\ln t}{1+t^2}\right|$ tend vers 0, d'où $\left|\dfrac{\ln t}{1+t^2}\right| = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et ainsi, par comparaison, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
En $+\infty$, $t^{3/2}\left|\dfrac{\ln t}{1+t^2}\right|$ tend vers 0, d'où $\left|\dfrac{\ln t}{1+t^2}\right| = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et ainsi, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Ceci prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

### 3.5. Espace vectoriel de applications intégrables sur I

**Théorème :** L'ensemble E des applications définies, continues et intégrables sur I, à valeur dans $\mathbb{K}$, munies de la somme des applications et du produit d'une application par un scalaire, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{K})$

**Démonstration :** E est non vide, il contient par exemple la fonction nulle.
Il est stable par combinaison linéaire car $\forall t \in \mathrm{I}$, $|\lambda f(t) + \mu g(t)| \leqslant |\lambda|\,|f(t)| + |\mu|\,|g(t)|$,
ce qui prouve l'intégrabilité de $\lambda f + \mu g$ par simple linéarité des intégrales convergente de $|f|$ et $|g|$. ■

### 3.6. Cas des fonctions de signe constant

**Théorème :** Si $f$ est de signe constant sur $[a, b[$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\ \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{sont de même nature.}$$

La convergence de l'intégrale équivaut, dans ce cas, à son intégrabilité.

**Démonstration :** $f$ ou $-f$ est positive, l'une des deux est : $|f|$.
La linéarité des intégrales convergentes permet de conclure. ■

> Quand on utilise ce théorème, on écrit **clairement** que dans le cas d'une fonction **de signe constant**, la convergence de son intégrale équivaut à sa convergence absolue.

## 4. How to...

### 4.1. Intégrale généralisée et intégrabilité

On a vu, ce qui n'est pas très pratique à priori, qu'on avait :
- la notion d'intégrale impropre ;
- et celle d'intégrabilité.

En pratique, il suffit de savoir que :
- l'intégrabilité de $f$ sur I entraîne la convergence de $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$ ;
- l'intégrabilité de $f$ sur I équivaut à la convergence absolue de $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$, c'est à dire celle de $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f|$.

### 4.2. Nature d'une intégrale généralisée

On considère donc l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, avec $a$ ou $b$ qui peuvent être infinis.

### a/ Problèmes de convergence

#### i) Identification

- A une borne infinie, il y a toujours un problème de convergence ;
- à une borne finie,
  - regarder si la fonction est définie et continue, il n'y a alors pas de problème ;
  - sinon, regarder si elle est prolongeable par continuité, c'est alors un faux problème ;
  - et sinon, il faut traiter le problème de convergence.

Les propriétés requises pour étudier une convergence sont à considérer sur un intervalle qui contient la borne et que l'on choisit comme on veut.

#### ii) Refus d'étude

Si on a à calculer l'intégrale en cherchant une primitive (lire l'énoncé !), on peut toujours revenir à la définition qui dit qu'une intégrale converge si et seulement si une primitive a une limite finie à la borne considérée.

### b/ Cas particulier

#### i) Croissances comparées

Si la fonction est un mélange de puissances, logarithmes et exponentielles, privilégier, en refaisant la démonstration, la règle $t^\alpha f(t)$.

#### ii) Changement de variable

Si un changement de variable, monotone de classe $\mathscr{C}^1$, saute aux yeux, il fournit une autre intégrale
- plus simple ( ?)
- et de même nature.

### c/ Fonction positive ou de signe constant

Essayer d'utiliser les règles :
- de comparaison ;
- d'équivalence ;
- et de Riemann.

Si la fonction $f$ est négative, $-f$ est positive et son intégrale est de même nature que celle de $f$.

### d/ Fonction de signe variable

Essayer de penser :
- à la convergence absolue ;
- ou à une intégration par parties pour avoir une autre intégrale plus facile à étudier.

### e/ Ne pas oublier...

> On travaille **l'application** (majoration, équivalence, valeur absolue, primitive...)
> et on conclut sur la convergence de l'**intégrale** !