Sommaire

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Produit Scalaire sur E

1.1. Forme bilinéaire symétrique sur E

Définition : Soit $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \Psi(u, v) \end{array} \right.$

On dit que Ψ est **bilinéaire symétrique** sur E

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \forall u \in E, & \Psi_u : v \to \Psi_u(v) = \Psi(u, v) \text{ est linéaire} \\ \forall v \in E, & \Psi_v : u \to \Psi_v(u) = \Psi(u, v) \text{ est linéaire} \\ \forall u, v \in E, & \Psi(u, v) = \Psi(v, u) \end{array} \right.$$

Théorème : Pour montrer qu'une forme est bilinéaire symétrique, il suffit de montrer qu'elle est linéaire par rapport à une variable, au choix, et qu'elle est symétrique.

Démonstration : On sait $\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \forall u, u_1, u_2 \in E \\ \forall v \in E \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(\lambda.u_1 + \mu.u_2, v) = \lambda\,\Psi(u_1, v) + \mu\,\Psi(u_2, v) \\ \Psi(u, v) = \Psi(v, u) \end{array} \right.$

D'où $\Psi(u, \lambda.v_1 + \mu.v_2) = \Psi(\lambda.v_1 + \mu.v_2, u) = \lambda\,\Psi(v_1, u) + \mu\,\Psi(v_2, u) = \lambda\,\Psi(u, v_1) + \mu\,\Psi(u, v_2)$ en faisant jouer la symétrie et la linéarité par rapport à chaque variable. On obtient bien la deuxième linéarité. ∎

1.2. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

Définition : Si Ψ est une forme bilinéaire symétrique sur E, alors $q : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto q(u) = \Psi(u, u) \end{cases}$ est une forme quadratique, c'est **la forme quadratique associée** à Ψ.

On a : $q(\lambda.u) = \lambda^2 q(u)$, ce qui prouve que q n'est pas linéaire !

Théorème : Si q une forme quadratique sur E, alors $\Psi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

est une forme bilinéaire symétrique.
On dit alors que Ψ est la **forme polaire** de q.

Démonstration : La symétrie est évidente, on admet la bilinéarité.

$$\begin{aligned} \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2} &= \frac{\Psi(u+v, u+v) - \Psi(u, u) - \Psi(v, v)}{2} \\ &= \frac{(\Psi(u, u) + \Psi(u, v) + \Psi(v, u) + \Psi(v, v)) - \Psi(u, u) - \Psi(v, v)}{2} \\ &= \frac{\Psi(u, v) + \Psi(v, u)}{2} \\ &= \Psi(u, v) \end{aligned}$$

■

1.3. Forme quadratique définie positive

Définition : q une forme quadratique,
on dit que q est **positive** $\Leftrightarrow \forall u \in E,\ q(u) \geqslant 0$.

Définition : q une forme quadratique positive,
on dit que q est **définie-positive** $\Leftrightarrow \forall u \in E, (q(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0)$.
On dit aussi que q est **positive non-dégénérée**.

Le même vocabulaire s'applique à la forme bilinéaire symétrique.

1.4. Produit Scalaire sur E

Définition : Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
$\Psi(u, v)$ se note le plus souvent $\langle u, v \rangle$.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v se note le plus souvent $\langle u, v \rangle$, mais aussi $(u|v)$ ou encore quand il n'y a pas d'ambiguïté $u \centerdot v$.

Exemple : Le produit scalaire usuel du plan ou de l'espace. La forme quadratique est alors le carré scalaire.

Pour montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire, on montre successivement :
- la linéarité par rapport à une variable ;
- la symétrie ;

A ce niveau, on conclut que la forme est **bilinéaire symétrique**.

Ensuite, on montre :
- la positivité de la forme quadratique et enfin ;
- son caractère défini-positif.

A ce niveau, on conclut que la forme bilinéaire symétrique est bien un **produit scalaire**.

Définition : Un espace vectoriel **préhilbertien** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Un espace vectoriel préhilbertien est donc un espace vectoriel réel. Il peut être de dimension finie ou infinie.

Définition : Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Un espace vectoriel euclidien est donc un espace vectoriel réel.

1.5. Exemples classiques

a/ Produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$

Si les vecteurs x et y sont de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans la base orthonormale canonique, alors : $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

b/ Produit scalaire défini par une intégrale

On va montrer que sur $\mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

Il faut d'abord montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique, c'est à dire qu'elle est linéaire par rapport à la première variable et symétrique.

On considère des polynômes quelconques P_1, P_2, Q et des scalaires quelconques λ, μ.
- $\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \mu \langle P_2, Q \rangle$ par simple linéarité de l'intégration.
- $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ car $P(t)\, Q(t) = Q(t)\, P(t)$ pour tout t

Il faut ensuite montrer que la forme quadratique est positive puis définie-positive.

On considère un polynôme quelconque P.
- $\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. La forme est positive.
- $\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\, \mathrm{d}t = 0$ implique que $\forall t \in [0.1]$, $P^2(t) = 0$ car c'est un polynôme, donc une application **continue**, qui est de plus positive et d'intégrale nulle (théorème des 3 conditions).

  On a donc $\forall t \in [0.1]$, $P(t) = 0$, et enfin, $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 0$, c'est à dire $P = 0$ car un **polynôme** qui a une infinité de racines est nul.

  La forme est donc bien définie positive.

Finalement, sur $\mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

c/ Produit scalaire sur un espace de matrices

Montrons que $\langle A, B\rangle = tr\left({}^t AB\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Il faut montrer la linéarité par rapport à la première (ou la deuxième) variable, la symétrie, puis il faut montrer que la forme quadratique associée est positive, puis définie-positive.

- $\langle A, \lambda B + \mu C\rangle = tr\left({}^t A(\lambda B + \mu C)\right) = tr\left(\lambda\, {}^t AB + \mu\, {}^t AC\right) = \lambda\, tr\left({}^t AB\right) + \mu\, tr\left({}^t AC\right)$

  Ce qui donne : $\langle A, \lambda B + \mu C\rangle = \lambda \langle A, B\rangle + \mu \langle A, C\rangle$ en utilisant la linéarité de la trace.
- $\langle B, A\rangle = tr\left({}^t BA\right) = tr\left({}^t\left({}^t BA\right)\right) = tr\left({}^t AB\right) = \langle A, B\rangle$, en utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont la même trace.

  La forme est donc bilinéaire symétrique.
- ${}^t AB$ a pour coefficient $i^{ème}$ ligne, $i^{ème}$ colonne : $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} b_{ji}$, celui de ${}^t AA$ est : $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}^2$

  d'où : $\langle A, A\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 0$.

  La forme est bien positive.
- $\langle A, A\rangle = 0$ donne $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$ puis $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad a_{i,j} = 0$ et enfin $A = 0$.

  La forme est définie positive.

On a bien un produit scalaire. De plus : $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

2. Norme associée à un produit scalaire

2.1. Norme sur E

Définition :

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & \|u\| \end{array}\right. \text{ est une norme} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall u, v \in E,\ \ \|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda.u\| = |\lambda|\,\|u\| \text{ (positive homogénéité)} \\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ (séparation)} \end{array}\right.$$

La norme d'un vecteur u est souvent notée $\|u\|$

> Même si on parle souvent de **la** norme d'un vecteur, il y a des infinités de normes différentes...

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{array}{l} \left\|(x, y)\right\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ est la norme usuelle, mais} \\ \left\|(x, y)\right\| = |x| + |y| \text{ est une autre norme, de même que} \\ \left\|(x, y)\right\| = \max\left(|x|, |y|\right) \text{ en est une troisième} \end{array}\right.$

2.2. Distance associée

Définition : (distance associée)
On définit la distance de deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel par : $d(u, v) = \|v - u\|$

2.3. Théorème de Pythagore

Théorème : $\|\cdot\|$ une norme euclidienne et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire, alors,

$\forall u, v \in E \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$

Théorème : $\|\cdot\|$ une norme euclidienne et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire, alors

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$$

La démonstration a été faite dans la démonstration du théorème précédent.

2.4. Identité du parallélogramme

Théorème : (**Identité du parallélogramme**)
$\|\cdot\|$ une norme euclidienne et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire, alors,

$$\forall u, v \in \mathrm{E} \quad \|u+v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2$$

Démonstration : On ajoute les deux égalités suivantes :
$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\langle u, v\rangle$, et,
$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\langle u, v\rangle$ ■

2.5. Identité de polarisation

Compte tenu de ce qu'on a vu sur la forme polaire d'une forme quadratique, on a :

Théorème : (**Identité de polarisation**)
$\|\cdot\|$ une norme euclidienne et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son produit scalaire, alors,

$$\forall u, v \in \mathrm{E} \quad \langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$

2.6. Inégalité de Cauchy-Schwarz (ou de Schwarz)

Théorème : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E, alors,

$$\forall u, v \in \mathrm{E}, \quad |\langle u, v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}$$

L'égalité n'est vérifiée que si u et v sont liés.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut aussi s'écrire :

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$$

Démonstration : On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle u+\lambda.v, u+\lambda.v\rangle &\geqslant 0 \\ \langle v, v\rangle\,\lambda^2 + 2\,\langle u, v\rangle\,\lambda + \langle u, u\rangle &\geqslant 0 \end{aligned}$$

expression du second degré en λ, qui ne change pas de signe, elle a donc un discriminant négatif, d'où : $\dfrac{\Delta}{4} = \langle u, v\rangle^2 - \langle v, v\rangle\langle u, u\rangle \leqslant 0$
Ce qui assure le résultat.
Remarquons que l'égalité : $|\langle u, v\rangle| = \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}$ ne se produit que si $\Delta = 0$,
donc si $\langle v, v\rangle\,\lambda^2 + 2\,\langle u, v\rangle\,\lambda + \langle u, u\rangle = 0$ pour un certain λ.
Cela revient à $\langle u+\lambda.v, u+\lambda.v\rangle = 0$ et enfin $u + \lambda.v = 0$, u et v sont liés. ■

Exemple : On va appliquer l'inégalité de Schwarz avec le produit scalaire précédent et $\mathrm{Q}(t) = t$, compte tenu que $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$, on obtient $\displaystyle\left(\int_0^1 t\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{P}^2(t)\,\mathrm{d}t$ qui est un résultat valable pour tout polynôme P.

On n'oubliera donc pas que l'inégalité de Schwarz permet de montrer de nombreuses inégalités « étonnantes ».

> *Cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz*
> Pour avoir l'égalité, il faut que le discriminant soit nul, c'est à dire que le produit scalaire soit, en valeur absolue le produit des normes, ou encore, que les deux vecteurs soient colinéaires. Réciproquement, si les vecteurs sont colinéaires, on a évidemment l'égalité.

Théorème : L'inégalité de Schwarz est une égalité si, et seulement si, les deux vecteurs sont colinéaires.

3. Orthogonalité, Orthonormalité

3.1. Orthogonalité

Définition : u et v sont orthogonaux pour $\langle\cdot,\cdot\rangle \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$

Exemple : $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0, 2\pi])\,, \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$, alors $\begin{cases} f : t \to \sin t \\ g : t \to \cos t \end{cases}$ sont orthogonales.

En effet, c'est encore le théorème des 3 conditions qui permet de prouver qu'on a encore affaire à un produit scalaire et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \;\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 0$, ce qui prouve l'orthogonalité.

> Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Théorème : Un vecteur est orthogonal à tous les vecteurs d'un sous espace vectoriel de dimension finie si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de ce sous espace vectoriel.

Démonstration : L'implication est évidente.

Pour la réciproque, si $\langle u, e_1\rangle = \langle u, e_2\rangle = 0$, alors $\langle u, \lambda\, e_1 + \mu\, e_2\rangle = 0$. Ce qui prouve que u orthogonal à une famille de vecteurs entraine u orthogonal à toute combinaison linéaire de ces vecteurs, et donc à tout vecteur de l'espace vectoriel engendré... ■

3.2. Famille orthogonale, orthonormale de vecteurs

Définition : Une famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de vecteurs est **orthogonale**
$\Leftrightarrow$ deux vecteurs quelconques de cette famille, u_i, u_j, pour $i \neq j$ sont orthogonaux.

Définition : Une famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de vecteurs est **orthonormale**

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{deux vecteurs quelconques de cette famille, } u_i, u_j, \text{ pour } i \neq j \text{ sont orthogonaux.} \\ \text{tout vecteur } u_i \text{ de cette famille est normé } (\|u_i\| = 1)\,. \end{cases}$

> On passe d'une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** à une famille orthonormale en normant chaque vecteur.

Dans les espaces vectoriels de polynômes, on ne confondra pas un polynôme *normé* et un polynôme *normalisé*.

- Un polynôme normalisé est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1, par exemple : $X^2 + 2X + 3$;
- un polynôme normé est un polynôme de norme 1, ce qui dépend du produit scalaire choisi.

Par ailleurs, certaines normes de polynômes peuvent sembler surprenantes.
Ainsi, sur $\mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.
Mais le polynôme constant 1 n'est pas de norme 1, en effet : $\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t} = \sqrt{2}$...

Théorème : Tout famille orthonormale ou toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration : Soit $\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \cdots + \lambda_n.u_n = 0$, on fait le produit scalaire par u_n, tous les $\langle u_i, u_n \rangle$ sont nuls sauf $\langle u_n, u_n \rangle$ d'où $\lambda_n = 0$.

Par récurrence immédiate, tous les λ_i sont nuls, la famille est libre. ■

3.3. Théorème et procédé de Schmidt

Théorème : Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E préhilbertien, alors, il existe une famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ orthonormale de vecteur telle que

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

Démonstration : Il suffit de fabriquer une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$,
la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant n, les ε_i sont non nuls.

La démonstration repose sur le fait qu'on ne change pas l'espace vectoriel engendré par une famille

- en ajoutant à cette famille des vecteurs de l'espace vectoriel engendré ou
- en enlevant à cette famille un ou des vecteurs combinaison linéaire des autres.

La démonstration se fait par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ convient.
On l'admet au rang n, on le montre au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}) &= \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}) \\ &= \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, e_{n+1})\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon^*_{n+1} = e_{n+1} + \lambda_1.\varepsilon_1 + \lambda_2.\varepsilon_2 + \cdots + \lambda_n.\varepsilon_n$ avec $\lambda_i = -\dfrac{\langle e_{n+1}, \varepsilon_i \rangle}{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle}$,
alors $\left\langle \varepsilon^*_{n+1}, \varepsilon_i \right\rangle = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
On pose $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{\varepsilon^*_{n+1}}{\left\|\varepsilon^*_{n+1}\right\|}$ avec toujours les mêmes orthogonalités.
Et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, e_{n+1}) &= \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, e_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \\ &= \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})\end{aligned}$$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$ est bien orthonormale. ■

Théorème : Tout espace vectoriel euclidien, ou tout sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien possède au moins une base orthonormale.

Démonstration : On applique le théorème de Schmidt à une base quelconque. ■

En pratique, la démonstration du théorème nous guide vers le procédé de Schmidt :

- On part d'une base quelconque $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$
- On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$

  C'est le premier vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_2^* = e_2 + \lambda.\varepsilon_1$

  On cherche λ tel que $\left\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \right\rangle = 0$, ce qui donne $\lambda = -\langle e_2, \varepsilon_1 \rangle$
- On pose $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_2^*}{\left\|\varepsilon_2^*\right\|}$

  C'est le deuxième vecteur de la base orthonormale.
- On pose $\varepsilon_3^* = e_3 + \lambda.\varepsilon_1 + \mu.\varepsilon_2$

  On cherche λ et μ tel que $\begin{cases} \left\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \right\rangle = 0 \\ \left\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \right\rangle = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \lambda = -\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \\ \mu = -\langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \end{cases}$
- On pose $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon_3^*}{\left\|\varepsilon_3^*\right\|}$

  C'est le troisième vecteur de la base orthonormale.
- On continue ainsi en n'oubliant pas qu'à chaque étape, le calcul s'allonge...
- En pratique, on travaille en théorique le plus longtemps possible ! On profite ainsi de nombreuses simplifications à priori.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du nouveau produit scalaire (admis) $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$, on va chercher une base orthonormale. On part de la base $\left(1,\ X,\ X^2\right)$

On a $\varepsilon_1^* = 1$ puis $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ le premier vecteur normé, ceci par un calcul simple.

$\varepsilon_2^* = X + \lambda\varepsilon_1$, on écrit $\left\langle \varepsilon_2^*, \varepsilon_1 \right\rangle = 0 = \langle X, \varepsilon_1 \rangle + \lambda = \lambda$, et on obtient $\varepsilon_2 = X\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, encore par un calcul simple.

$\varepsilon_3^* = X^2 + \lambda\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1$, on écrit $\left\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_1 \right\rangle = 0 = \left\langle X^2, \varepsilon_1 \right\rangle + \mu$ d'où $\mu = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $\left\langle \varepsilon_3^*, \varepsilon_2 \right\rangle = 0 = \left\langle X^2, \varepsilon_2 \right\rangle + \lambda = \lambda$

D'où $\varepsilon_3^* = X^2 - \dfrac{1}{3}$ qu'il suffit de normer pour obtenir $\varepsilon_3 = \dfrac{X^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{15}\sqrt{10}} = \dfrac{\left(3X^2 - 1\right)\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

On voit que le calcul devient vite complexe...

Ce qu'on peut voir en dimension 2 sur la figure 1, page ci-contre.

3.4. Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

Théorème : E un espace vectoriel préhilbertien, F un sous espace vectoriel de dimension finie muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Alors

$$p : u \longrightarrow p(u) = \langle u, e_1 \rangle .e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle .e_n$$

définit un projecteur.

Et comme $(u - p(u)) \in F^{\perp}$, on dit que p est la projection orthogonale sur F.

La figure 2, page suivante, illustre ce théorème.

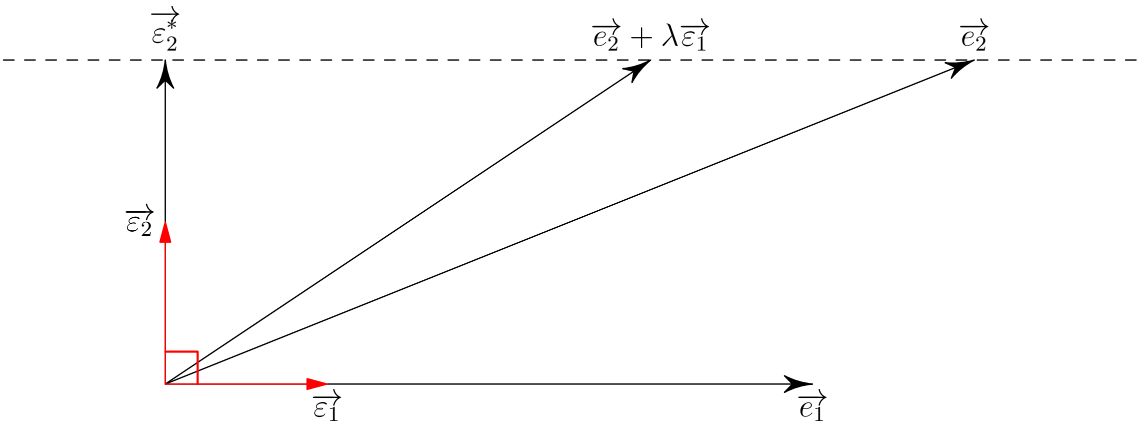

Figure 1 – **Procédé de Schmidt en dimension 2**

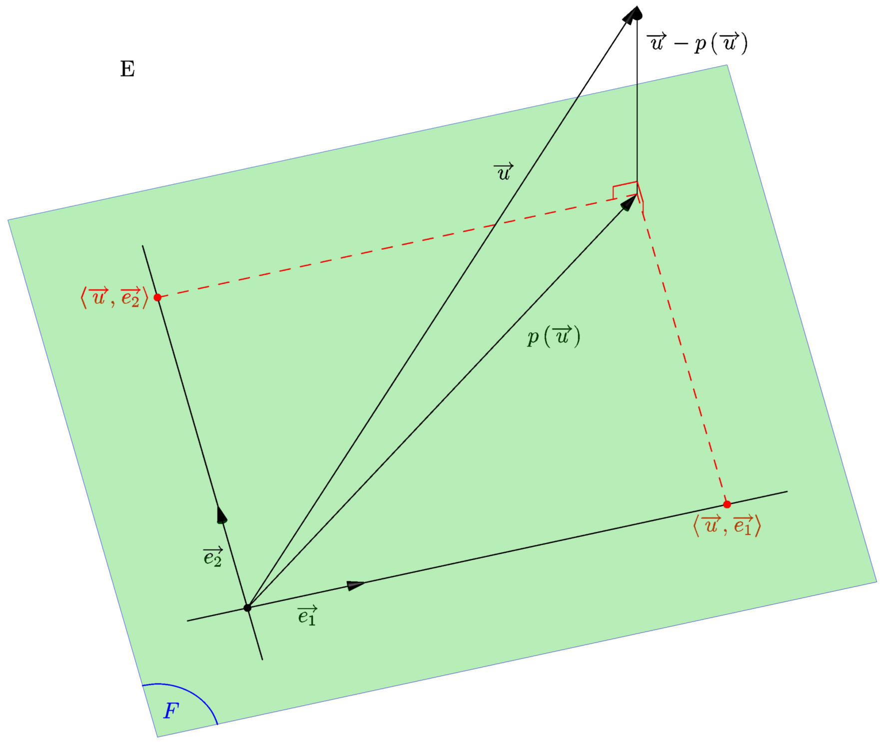

Figure 2 – **Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie**

Démonstration : Pour montrer que $(u - p(u)) \in F^{\perp}$, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à chaque e_i.

$$\begin{aligned}\langle u - p(u), e_i\rangle &= \langle u, e_i\rangle - \langle\langle u, e_1\rangle.e_1 + \cdots + \langle u, e_n\rangle.e_n, e_i\rangle \\ &= \langle u, e_i\rangle - \langle\langle u, e_i\rangle.e_i, e_i\rangle\end{aligned}$$

car tous les autres termes sont nuls. D'où

$$\langle u - p(u), e_i\rangle = \langle u, e_i\rangle - \langle u, e_i\rangle\langle e_i, e_i\rangle = 0$$

p est clairement linéaire par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable.

Il reste à montrer que p est un projecteur, c'est à dire $p \circ p = p$.

$$\begin{aligned} p \circ p(u) &= p(p(u)) \\ &= p(\langle u, e_1 \rangle .e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle .e_n) \\ &= \langle u, e_1 \rangle .p(e_1) + \cdots + \langle u, e_n \rangle .p(e_n) \\ &= \langle u, e_1 \rangle .e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle .e_n \end{aligned}$$

car $p(e_i) = \langle e_i, e_i \rangle .e_i = e_i$.
D'où $\quad p \circ p(u) = p(u)$

et enfin

$$p \circ p = p$$

Lorsque E est de dimension finie, on montre facilement que $E = F \oplus F^{\perp}$ et p est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$, on appelle souvent q la projection sur $F^{\perp}$ parallèlement à F, on a alors $Id = p + q$.
■

En pratique, comme il faut une base orthonormale du sous espace sur lequel on projette, on cherchera p si $\dim F \leqslant \dim F^{\perp}$, et q sinon. On projette sur le plus petit...

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on cherche p la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y - z = 0$

$P^{\perp} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ de base orthonormale $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Avec $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $q(u) = \left\langle u, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \dfrac{x+y-z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où $p(u) = u - q(u) = \begin{pmatrix} x - \frac{x+y-z}{3} \\ y - \frac{x+y-z}{3} \\ z + \frac{x+y-z}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$

La matrice de cette projection dans la base canonique est donc : $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Définition : Dans les conditions et avec les notations du théorème précédent, on dit que **la distance de** u **à** F est : $\|u - p(u)\|$.

3.5. Recherche pratique

Pour trouver le projeté orthogonal $p(u)$ d'un vecteur u sur un sous espace de dimension finie F, on peut :

- utiliser une base orthonormale de F et la formule de projection ;
- ou bien écrire que le vecteur $u - p(u)$ est orthogonal aux vecteurs d'une famille génératrice de F.

A vous de choisir la méthode qui génère le moins de calculs !

3.6. Orthogonal d'un sous espace vectoriel

Théorème : Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel préhilbertien réel E, alors on note $F^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

C'est un sous espace vectoriel de E, et, de plus : F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
Enfin, si E est de dimension finie, alors : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Il est facile de montrer que $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.
Si on note p la projection orthogonale sur F, alors l'égalité : $u = p(u) + (u - p(u))$, associée au fait que le projeté du vecteur nul est le vecteur nul, nous assure que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.

4. Espaces Vectoriels Euclidiens

Rappelons que ce sont les espaces vectoriels réels de dimension finie munis d'un produit scalaire.

4.1. Produit scalaire et norme dans une base orthonormale

Théorème : E étant muni d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$,

U : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et V : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base,

alors $\langle u, v \rangle = {}^t\mathrm{U}\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

De plus, la **norme** euclidienne est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Démonstration : Par bilinéarité :

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j.e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle,$$

Les produits scalaires $\left\langle e_i, e_j \right\rangle$ sont nuls pour $i \neq j$ et valent 1 sinon.
Ce qui donne :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

■

4.2. Endomorphisme orthogonal, groupe orthogonal

Définition : Un endomorhisme φ de E un espace vectoriel euclidien, est dit **orthogonal**
⇔ φ conserve le produit scalaire
⇔ $\forall u, v \in \mathrm{E}, \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

Théorème : φ est orthogonal ⇔ φ conserve la norme ⇔ $\forall u \in \mathrm{E}, \left\|\varphi(u)\right\| = \|u\|$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(u+v)\right\|^2 &= \langle \varphi(u+v), \varphi(u+v) \rangle \\ &= \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle + 2\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle + \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \|u+v\|^2\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\|u+v\|^2 = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2c + \langle v, v \rangle$$

D'où $\langle u, v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$.

La réciproque est évidente en prenant $u = v$. ∎

Théorème : Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

Démonstration : Il suffit de montrer que φ est injective car E est de dimension finie.

$$\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \left\|\varphi(u)\right\| = 0 \Leftrightarrow \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$ ∎

Théorème : Un endomorphisme orthogonal conserve l'orthogonalité.

Théorème : Un endomorphisme est orthogonal
$\Leftrightarrow$ il transforme une base orthonormale en une base orthonormale
$\Leftrightarrow$ il transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.

Démonstration : Les implications directes sont claires car c'est un automorphisme qui conserve l'orthogonalité.
Pour la réciproque, on considère $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale,
et φ un endomorphisme tel que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))$ soit une base orthonormale.

$$\begin{aligned}\langle\varphi(u), \varphi(v)\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j \left\langle\varphi(e_i),\ \varphi(e_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ &= \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

∎

Théorème : Si un sous-espace vectoriel F est stable par une isométrie vectorielle, il en est de même de son orthogonal $F^{\perp}$.

4.3. Groupe orthogonal

Théorème : L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E, muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe noté O(E), sous groupe de GL(E).

Démonstration : Cela signifie que :
- la composée de deux endomorphismes orthogonaux est un endomorphisme orthogonal,
- l'application réciproque d'un endomorphisme orthogonal est un endomorphisme orthogonal,
- et enfin, l'identité est un endomorphisme orthogonal.

∎

4.4. Matrice orthogonale

Définition : Une matrice M est **orthogonale**
$\Leftrightarrow$ M est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Théorème : M est orthogonale
$\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2
$\Leftrightarrow$ les vecteurs lignes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2
$\Leftrightarrow M^{-1} = {}^{t}M$
$\Leftrightarrow M\,{}^{t}M = {}^{t}MM = I$ (une seule égalité suffit).

Démonstration :
M est la matrice de φ, endomorphisme orthogonal, dans la base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Les vecteurs colonnes de M sont les vecteurs d'une base orthonormale, ils sont donc normés et orthogonaux 2 à 2.

Réciproquement, si les vecteurs colonnes sont normés et orthogonaux 2 à 2, φ transforme une base orthonormale en une base orthonormale. φ est donc orthogonal et M orthogonale.

L'équivalence à $\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{I}$ en découle immédiatement.

$\mathrm{M}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{M}^{-1} = {}^t\mathrm{M} \Leftrightarrow {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I} \Leftrightarrow {}^t\mathrm{M}$ est orthogonale.

Et enfin, cela équivaut à ce que les vecteurs lignes de M sont normés et orthogonaux 2 à 2. ■

> Une matrice orthogonale s'interprète donc
> comme la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale ou
> comme une matrice de changement de bases orthonormales.

Notation : Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, le groupe orthogonal de E se note $\mathrm{O}(n)$ ou $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
La loi est alors le produit des matrices.

4.5. Isométries directes et idirectes

Définition : Une isométrie est
- directe, ou positive, si et seulement si son déterminant est égal à 1 ;
- indirecte, ou negative, si et seulement si son déterminant est égal à -1.

Théorème : L'ensemble des isométries positives, muni de la même loi est un groupe, appelé groupe spécial orthogonal, noté selon les cas SO(E) ou $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

5. Isométries Vectorielles du Plan et de l'Espace

Dans une base orthonormale, la matrice d'une isométrie, application qui conserve la norme des vecteurs, est orthogonale, ce qui est une propriété caractéristique. Une matrice orthogonale est donc la matrice d'une isométrie dans une base orthonormale.

C'est cette isométrie dont on cherche à identifier les éléments géométriques.

5.1. Cas particulier des symétries orthogonales

Théorème : Une isométrie vectorielle est une **symétrie** orthogonale $\Leftrightarrow$ Sa matrice dans une base orthonormale est **symétrique**.

Démonstration : Soit φ l'isométrie et M sa matrice, orthogonale, dans une base orthonormale.

Si φ est une symétrie orthogonale, $\varphi \circ \varphi = \mathrm{I}d$, donc $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}$ d'où $\mathrm{M} = \mathrm{M}^{-1} = {}^t\mathrm{M}$.

M est donc symétrique.

Réciproquement, si M est symétrique, $\mathrm{M} = {}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}^{-1}$ donc $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}$ et $\varphi \circ \varphi = \mathrm{I}d$, on a bien montré que φ est une symétrie orthogonale. ■

Cette isométrie est donc la symétrie orthogonale par rapport à l'ensemble des vecteurs invariants.

L'interprétation géométrique de cette isométrie ne dépend donc que de la dimension de cet espace vectoriel.

a/ Symétries orthogonales du plan

On trouve :

- L'identité, qui est une isométrie directe.
  Tous les vecteurs sont invariants.
- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle, isométrie indirecte.
  On a une droite vectorielle invariante.
- Moins l'identité, isométrie directe.
  Seul le vecteur nul est invariant.
  C'est aussi la rotation d'angle π.

b/ Symétries orthogonales de l'espace

On trouve :

- L'identité, qui est une isométrie directe.
  Tous les vecteurs sont invariants.
- Une symétrie orthogonales par rapport à une droite vectorielle, isométrie directe.
  On a une droite vectorielle invariante.
  C'est aussi une rotation d'angle π autour de cette droite.
- Une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel, isométrie indirecte.
  On a un plan vectoriel invariant.
- Moins l'identité, isométrie indirecte.
  Seul le vecteur nul est invariant.

> Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est indirecte quand on travaille dans le plan et directe quand on travaille dans l'espace...

5.2. Isométries vectorielles du plan

Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.
On a déjà reconnu les éventuelles symétries orthogonales.

a/ Isométries directes, le déterminant vaut 1

C'est une rotation d'angle θ, l'identité ou moins l'identité.

La matrice est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

b/ Isométrie indirecte, le déterminant vaut -1

C'est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_{\frac{\theta}{2}}$ tournée de $\dfrac{\theta}{2}$ par rapport à l'axe Ox.

La matrice est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

5.3. Isométries vectorielles de l'espace

On a déjà reconnu les éventuelles symétries orthogonales. Dans une base orthonormale, la matrice est orthogonale.

Il y a toujours une valeur propre réelle puisque le polynôme caractéristique est réel de degré 3. Cette valeur propre est 1 ou -1.

Si les autres valeurs propres ne sont pas réelles, elles sont conjuguées, de produit positif. Comme le déterminant est le produit des valeurs propres, si le déterminant vaut 1, alors 1 est valeur propre, s'il vaut -1, alors -1 est valeur propre.

On ne considérera pas le cas où l'isométrie est l'identité.

a/ Isométrie directe : le déterminant vaut 1, le troisième vecteur est le produit vectoriel des 2 premiers

Dans une certaine base, la matrice de l'isométrie est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

C'est l'identité ou une rotation d'axe dirigé par un vecteur propre associé à 1 : $\overrightarrow{e_1}$, le premier vecteur de la base considérée, et d'angle θ.

On trouve θ :

- en cherchant $\cos\theta$ par la trace qui vaut $1 + 2\cos\theta$
- en cherchant le signe de $\sin\theta$ qui est celui de $\det\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{u})\right)$, $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur quelconque non colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$.
- le seul cas particulier est quand $\cos\theta = -1$, c'est à dire quand $\theta = \pi_{[2\pi]}$, auquel cas c'est une rotation d'angle π, appelée aussi demi-tour, c'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à l'axe dirgé par $\overrightarrow{e_1}$.

b/ Isométrie indirecte : le déterminant vaut -1, le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des 2 premiers

Dans une certaine base, la matrice de l'isométrie est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

C'est la composée commutative

- d'une rotation vectorielle et,
- d'une symétie orthogonale par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation.

On cherche d'abord l'axe de la rotation, qui est le sous-espace propre pour la valeur propre -1, qu'on oriente dans le sens de $\overrightarrow{e_{-1}}$.

On cherche ensuite $\cos\theta$ par la trace qui vaut ici $-1 + 2\cos\theta$.

- Si $\cos\theta = 1$, ce qui revient à ce que $\theta = 0_{[2\pi]}$, la rotation est l'identité. C'est simplement la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à « l'axe ».
- Sinon, c'est la composée annoncée. La seule donnée qui nous manque est le signe de $\sin\theta$ qui se trouve comme dans le cas d'une isométrie directe.

  Le signe de $\sin\theta$ est celui de $\det\left(\overrightarrow{e_{-1}}, \overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{u})\right)$, $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur quelconque non colinéaire à $\overrightarrow{e_{-1}}$.

Exemple : On va identifier la transformation dont la matrice dans une base orthonormale est : $\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Il est facile de voir que cette matrice est orthogonale, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle. Comme, de plus, elle est symétrique, c'est une symétrie vectorielle.

Il suffit de rechercher les vecteurs invariants, ce qui revient à : $\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$.

En soustrayant la première et la troisième ligne, on obtient $x = z$ et le système devient : $\begin{cases} x = z \\ 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$.

Il s'agit d'une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ engendrée par $\overrightarrow{u}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'isométrie est la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{\Delta}$, c'est aussi la rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle π.

Exemple : On va identifier la transformation

dont la matrice dans une base orthonormale est : $\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{4} & \dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{4} & -\dfrac{\sqrt{6}}{4} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Il est facile de voir que cette matrice est orthogonale, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle.

Ça n'est pas une symétrie orthogonale, car la matrice n'est pas symétrique.

Le troisième vecteur est l'opposé du produit vectoriel des deux premiers, c'est donc une isométrie indirecte.

On est dans le cas de la composée commutative d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

L'axe de la rotation et le plan de symétrie qui lui est orthogonal sont donnés par les vecteurs transformés en leur opposé : $\begin{cases} x - y - z\sqrt{6} = 0 \\ -x + y + z\sqrt{6} = 0 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{6} + 2z = 0 \end{cases}$ qui équivaut au système : $\begin{cases} x - y - z\sqrt{6} = 0 \\ 6x - 6y + 2z\sqrt{6} = 0 \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$.

L'axe est la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ engendrée et dirigée par $\overrightarrow{u}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le plan de symétrie est le plan $\overrightarrow{\Pi}$ d'équation $x + y = 0$.

L'angle de la rotation vérifie $-1 + 2\cos\theta = -2$ en utilisant la trace. On a donc $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$.

Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} < 0$, et donc $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$ à 2π près.

La transformation est la composée commutative de la rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ engendrée et dirigée par $\overrightarrow{u}$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\overrightarrow{\Pi}$ d'équation $x + y = 0$.

5.4. Rotations vectorielles de l'espace

Théorème : Si φ est la rotation d'angle θ, et d'axe dirgé par $\overrightarrow{e_1}$ alors :

$$\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = (1 - \cos\theta)\,\frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{e_1}\right\|^2}\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{u} + \sin\theta\,\frac{\overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{u}}{\left\|\overrightarrow{e_1}\right\|}$$

Démonstration : Il suffit de prendre une base orthonormale $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, pour laquelle $\overrightarrow{\imath}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$, de même sens, la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

L'image de $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta - z\sin\theta \\ y\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$.

La formule peut se récrire : $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = (1 - \cos\theta)\,\overrightarrow{\imath}\cdot\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{u} + \sin\theta\,\overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{u}$

On calcule les coordonnées de $(1 - \cos\theta)\,\overrightarrow{\imath}\cdot\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{u} + \sin\theta\,\overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{u}$:

$$\begin{pmatrix} (1-\cos\theta)\,x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\cos\theta \\ y\cos\theta \\ z\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -z\sin\theta \\ y\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta - z\sin\theta \\ y\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$ ■

Démonstration : On va donner ici une autre démonstration moins besogneuse.

Soit $\overrightarrow{\imath}$ normé et colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$, de même sens. On décompose $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath}\right)\overrightarrow{\imath} + \left(\overrightarrow{u} - \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath}\right)\overrightarrow{\imath}\right)$$

Ce dernier vecteur $\overrightarrow{u} - \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath}\right)\overrightarrow{\imath}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\imath}$.

Pour un tel vecteur $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{\imath}$: $\varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = \cos\theta\,\overrightarrow{v} + \sin\theta\left(\overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{v}\right)$

Et donc :

$$\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath}\right)\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\left(\overrightarrow{u} - \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath}\right)\overrightarrow{\imath}\right) + \sin\theta\left(\overrightarrow{\imath}\wedge\left(\overrightarrow{u} - \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath}\right)\overrightarrow{\imath}\right)\right)$$

Enfin, comme $\overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{0}$:

$$\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = (1 - \cos\theta)\left(\overrightarrow{\imath}\cdot\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{u} + \sin\theta\left(\overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{u}\right)$$ ■

6. Matrices Symétriques Réelles

6.1. Sous-espaces propres

Théorème : Les sous espaces propres d'une matrice symétriques réelle A sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration : On prend deux vecteurs colonnes U et V propres pour des valeurs propres distinctes λ et μ.

On calcule $U^TAV = \mu U^TV$ qui est un scalaire, donc égal à son transposé $U^TAV = V^TAU = \lambda V^TU$, en tenant compte du fait que A est symétrique.

Mais U^TV et V^TU sont aussi des scalaires, transposés l'un de l'autre donc égaux.

D'où : $(\lambda - \mu)U^TV = 0$, ce qui donne finalement $U^TV = 0$, U et V sont orthogonaux. ■

6.2. Théorème spectral

Théorème : *Théorème spectral*
A une matrice symétrique réelle, A est diagonalisable avec au besoin une matrice de passage orthogonale.

Ceci peut éviter bien des calculs puisque $P^{-1} = {}^tP$.

> Il est donc souvent intéressant de chercher à diagonaliser une **matrice symétrique réelle** dans une base orthonormale de vecteurs propres quand on a besoin de P^{-1}.

6.3. Diagonalisation d'une matrice symétrique réelle en dimension 3

Pour une matrice symétrique réelle en dimension 3, qu'on cherche à diagonaliser dans une base orthonormale, seulement 3 cas peuvent se produire :

- Une valeur propre triple : la matrice est déjà diagonale !
- Trois valeurs propres simples : les vecteurs propres associés sont déjà orthogonaux, il suffit de les normer.
- Une valeur propre simple λ et une double μ : on cherche E_μ correspondant à la valeur propre double, on trouve l'équation d'un plan vectoriel.

  Un vecteur normal à ce plan et normé est propre pour λ, c'est : $\overrightarrow{I}$, le premier vecteur de la nouvelle base orthonormale.

  On prend un vecteur de E_μ qu'on norme, c'est : $\overrightarrow{J}$, le second vecteur de la nouvelle base orthonormale.

  On calcule enfin $\overrightarrow{I} \wedge \overrightarrow{J}$, c'est : $\overrightarrow{K}$, le troisième vecteur de la nouvelle base orthonormale, qui est propre pour la valeur propre μ, compte tenu de l'orthogonalité des sous-espaces propres.