Chapitre 9
Isométries d'un espace euclidien

Exercice 1 : On commence par vérifier que $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}_E)$ sont supplémentaires.

- D'après le théorème du rang, on a
$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E) + \dim \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}_E).$$
- Si $y \in \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}_E)$, alors
$$u(y) = y \quad \text{et} \quad \exists x \in E, \quad y = u(x) - x,$$
donc, comme u est une isométrie, on a
$$\begin{aligned} \|y\|^2 = (y \mid y) = (y \mid u(x) - x) &= (y \mid u(x)) - (y \mid x) \\ &= (u(y) \mid u(x)) - (y \mid x) = 0. \end{aligned}$$
Ainsi $y = 0$ et $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E) \cap \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}_E) = \{0_E\}$.

On a donc montré que $E = \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}_E)$. Il reste à vérifier que ces deux espaces sont orthogonaux. Si $(x, y) \in \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E) \times \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}_E)$, alors
$$u(x) = x \quad \text{et} \quad \exists z \in E, \quad y = u(z) - z,$$
donc, comme u est une isométrie, on a
$$\begin{aligned} (x \mid y) = (x \mid u(z) - z) &= (x \mid u(z)) - (x \mid z) \\ &= (u(x) \mid u(z)) - (x \mid z) = 0. \end{aligned}$$
Ainsi $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}_E)$ sont orthogonaux.

Exercice 2 :

1. Pour $(P, Q) \in E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\begin{aligned} \varphi((\lambda P + \mu Q)(X)) &= (\lambda P + \mu Q)(1 - X) \\ &= \lambda P(1 - X) + \mu Q(1 - X) \\ &= \lambda \varphi(P(X)) + \mu \varphi(Q(X)), \end{aligned}$$
donc l'application φ est linéaire.
2. Pour $P \in E$, on a en posant $u = 1 - t$ dans l'intégrale
$$\|\varphi(P)\|^2 = \int_0^1 P(1-t)^2 dt = \int_0^1 P(u)^2 du = \|P\|^2,$$
donc $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.
3. Pour $P \in E$, on a
$$(\varphi \circ \varphi)(P(X)) = \varphi(P(1 - X)) = P(1 - (1 - X)) = P(X),$$
donc φ est une symétrie. Ainsi φ est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker}(\varphi + \operatorname{Id}_E)$. Si l'on note $P = aX^2 + bX + c \in E$, on a
$$\begin{aligned} \varphi(P(X)) = P(1 - X) &= a(1 - X)^2 + b(1 - X) + c \\ &= aX^2 - (2a + b)X + (a + b + c). \end{aligned}$$
Ainsi, on a
$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow \varphi(P) = P \\ &\Leftrightarrow aX^2 - (2a + b)X + (a + b + c) = aX^2 + bX + c \\ &\Leftrightarrow a = a \ \text{ et } \ -(2a + b) = b \ \text{ et } \ a + b + c = c \\ &\Leftrightarrow b = -a, \end{aligned}$$
donc $F = \operatorname{Vect}(X(1 - X), 1)$. De même, trouve $G = \operatorname{Vect}(2X - 1)$.
4. D'après la question précédente, les valeurs propres de φ sont $1, 1, -1$. Donc, on a $\det(\varphi) = 1 \times 1 \times (-1) = -1$.

Exercice 3 :

1. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. En prenant la normée, on obtient
$$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$
Comme $x \neq 0$, on en déduit $\lambda = \pm 1$.

2. Si u est diagonalisable, on a $E = E_1 \oplus E_{-1}$, donc u est une symétrie. Il suffit de vérifier que E_1 et E_{-1} sont orthogonaux pour montrer que u est une symétrie orthogonale. Si $(x, y) \in E_1 \times E_{-1}$, alors $u(x) = x$ et $u(y) = -y$. Par suite,
$$(x \mid y) = (u(x) \mid u(y)) = (x \mid -y) = -(x \mid y),$$
donc $(x \mid y) = 0$. Finalement, E_1 et E_{-1} sont orthogonaux.

Exercice 4 : Notons $(L_1, \dots, L_n)$ les lignes d'une telle matrice. D'après le cours $(L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur L_1 étant unitaire, on a nécessairement $L_1 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ Comme L_2 est unitaire et est orthogonal à L_1, on a $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. En itérant, on trouve que le matrices qui conviennent sont les matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n.$$

Exercice 5 : Notons $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes d'une telle matrice. D'après le cours $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Comme les vecteurs $C_1, \dots, C_n$ sont orthogonaux deux à deux et que leurs coefficients sont positifs, chacun d'eux ne peut avoir qu'une unique composante non-nulle. Comme ils sont unitaires, le coefficient correspondant vaut nécessairement 1. Ainsi les matrices qui conviennent sont les matrices dont les colonnes sont exactement à l'ordre près
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Chaque colonne étant unitaire, on trouve comme dans l'exercice précédent que chacune d'elles ne peut avoir qu'une unique composante non-nulle qui vaut ± 1. La solution est donc la même qu'à l'exercice précédent avec la possibilité de choisir en plus le signe pour chaque colonne.

Exercice 7 :

(i) L'endomorphisme u est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

(ii) L'endomorphisme u est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(\sqrt{3}i + j)$.

(iii) L'endomorphisme u est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(2i + j)$.

Exercice 8 :

(i) u est la rotation d'axe dirigé par $3i + j + k$ et d'angle $\theta = -\mathrm{Arccos}(-5/6)$.

(ii) u est la rotation d'axe dirigé par $i + k$ et d'angle $\theta = \pi/2$.

(iii) u est la composée de la rotation d'axe D dirigé par le vecteur $i - 4j$ et d'angle $\theta = -\mathrm{Arccos}(8/9)$ avec la réflexion par rapport à $D^\perp = \mathrm{Vect}(k, 4i + j)$.

(iv) u est la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(i + j, \sqrt{6}j - k)$.

(v) u est la rotation d'axe dirigé par $i + 4j + k$ et d'angle $\theta = \pi$.

Exercice 9 :

1. On a les équivalences
$$A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} A = \mathrm{I}_3 \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{et} \quad 2ab + b^2 = 0.$$
Ainsi, on obtient
$$A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (a, b) \in \left\{ (1, 0), (-1, 0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

2. On a
   - Si $(a, b) = (1, 0)$, alors $u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   - Si $(a, b) = (-1, 0)$, alors $u = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   - Si $(a, b) = (1/3, -2/3)$, alors l'isométrie u est la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(i - j, j - k)$
   - Si $(a, b) = (-1/3, 2/3)$, alors u est la rotation d'axe dirigé par $i + j + k$ et d'angle π.

Exercice 10 :

(i) On peut prendre

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) On peut prendre

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) On peut prendre

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 :

1. Comme la matrice B est symétrique réelle, on peut appliquer le théorème spectral. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$B = P\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)P^{-1}.$$
On en déduit que $A = B^2 = P\mathrm{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)P^{-1}$, donc les valeurs propres de A sont positives.
2. Comme la matrice A est symétrique réelle, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que
$$A = P\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}.$$
Si l'on pose $B = P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$, on a $B^2 = A$. De plus, comme $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$, on a en notant $D = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$
$$B^{\mathrm{T}} = (PDP^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} = PDP^{\mathrm{T}} = B,$$
donc B est symétrique réelle.

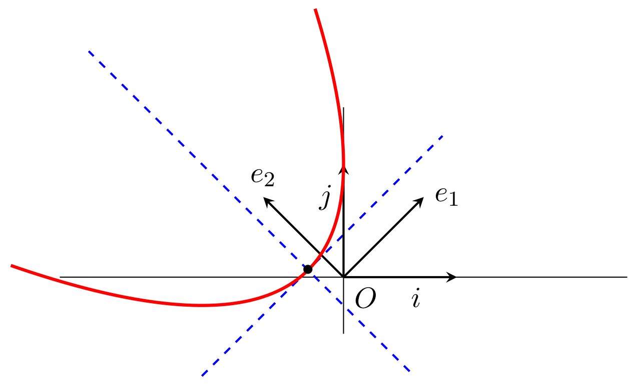
Exercice 12 :

1. D'après le théorème spectral, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Notons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ses valeurs propres. On a $\det(A) = \lambda\mu$ et $\mathrm{Tr}(A) = \lambda + \mu$. Ainsi l'inégalité à montrer devient
$$4\lambda\mu \leqslant (\lambda + \mu)^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu \Leftrightarrow 0 \leqslant (\lambda - \mu)^2,$$
d'où le résultat.
2. D'après la première question, on a égalité si et seulement si $\lambda = \mu$. Ainsi, on a égalité si et seulement si A est une matrice scalaire.

Exercice 13 :

(i) La conique $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble vide.

(ii) Dans le repère (O, e_1, e_2) où
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i + j),$$
l'équation de la conique $\mathscr{C}_2$ devient
$$2u^2 + \frac{u - 5v}{\sqrt{2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow v = \frac{2\sqrt{2}}{5}u^2 + \frac{1}{5}u + \frac{\sqrt{2}}{5}.$$
Ainsi, la conique $\mathscr{C}_2$ est une parabole dont le sommet a pour coordonnée $(-5/16, 1/16)$ dans le repère (O, i, j).



La conique $\mathscr{C}_2$

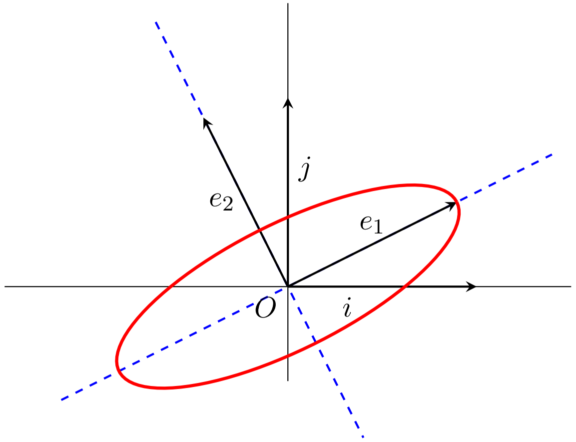
(iii) Dans le repère (O, e_1, e_2) où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-i + 2j),$$

l'équation de la conique $\mathscr{C}_3$ devient

$$5u^2 + 45v^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 9v^2 = 1.$$

Ainsi, la conique $\mathscr{C}_3$ est une ellipse de centre O.



La conique $\mathscr{C}_3$

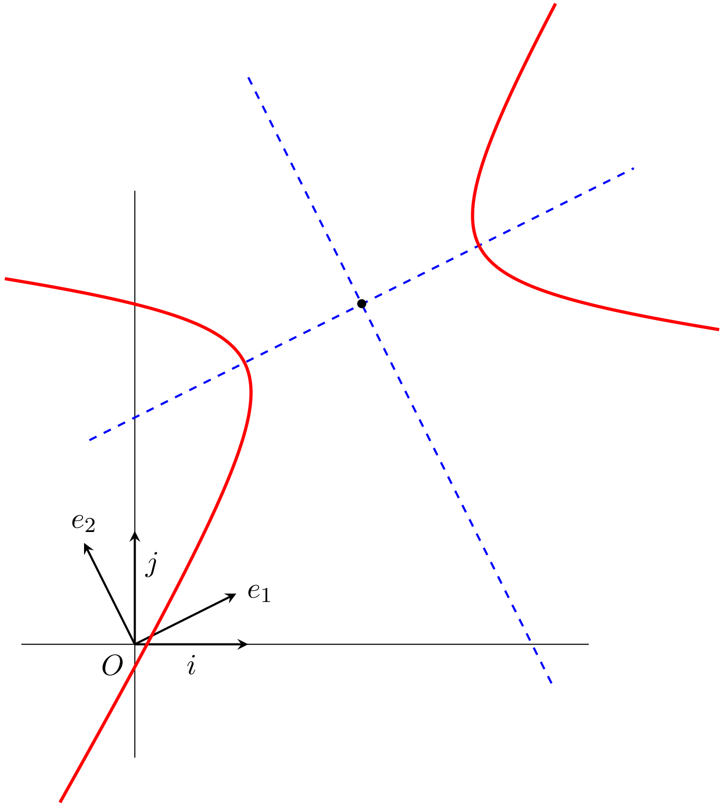
(iv) Dans le repère (O, e_1, e_2) où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-i + 2j),$$

l'équation de la conique $\mathscr{C}_4$ devient

$$3u^2 - 7v^2 - \frac{42}{\sqrt{5}}u + \frac{56}{\sqrt{5}}v + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(u - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 - 7\left(v - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 4.$$

Ainsi, la conique $\mathscr{C}_4$ est une hyperbole dont le centre a pour coordonnée $(2, 3)$ dans le repère (O, i, j).



La conique $\mathscr{C}_4$