

## Chapitre 4 Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

**Exercice 1 :** La vitesse du point à l'instant  $t \in I$  est  $v(t) = \|f'(t)\|$ . Comme  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , la fonction  $v$  est dérivable sur  $I$  et on a

$$\forall t \in I, \quad v'(t) = \frac{(f'(t) | f''(t))}{\|f'(t)\|} = \|f''(t)\| \cos(f'(t), f''(t)).$$

1. Si le point se déplace à vitesse constante, alors  $v' = 0$ , donc les vecteurs  $f'(t)$  et  $f''(t)$  sont orthogonaux pour tout  $t \in I$  d'après la formule précédente.
2. Si le point accélère, alors  $v' \geq 0$ , donc le cosinus de l'angle  $\theta(t)$  entre les vecteurs  $f'(t)$  et  $f''(t)$  est positif pour tout  $t \in I$  d'après la formule précédente. On en déduit que  $\theta(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$ .
3. Si le point accélère, alors  $v' \geq 0$ , donc le cosinus de l'angle  $\theta(t)$  entre les vecteurs  $f'(t)$  et  $f''(t)$  est négatif pour tout  $t \in I$  d'après la formule précédente. On en déduit que  $\theta(t) \in [\pi/2, 3\pi/2]$ .

**Exercice 2 :** D'après le cours, la fonction  $w$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout  $t \in I$ , on a

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f'(t) & f'(t) \\ g'(t) & g'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(t) & f''(t) \\ g(t) & g''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(t) & a(t)f'(t) + b(t)f(t) \\ g(t) & a(t)g'(t) + b(t)g(t) \end{vmatrix}.$$

En effectuant  $C_2 \leftarrow C_2 - b(t)C_1$ , puis en utilisant les linéarité sur la seconde colonne du déterminant, on obtient  $w'(t) = a(t)w(t)$  qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

**Exercice 3 :** On définit la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \begin{pmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(t) & v(t) & w(t) \end{pmatrix}.$$

Comme  $u, v$  et  $w$  sont dérivables, la fonction  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  d'après le cours. Comme  $f(a) = f(b) = 0$ , on obtient, d'après le théorème de Rolle, l'existence d'un point  $d \in ]a, b[$  tel que

$$0 = f'(d) = \begin{pmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(d) & v'(d) & w'(d) \end{pmatrix}.$$

Finalement,  $f'(a) = f'(d) = 0$  et  $f'$  est dérivable sur  $[a, b]$  (car  $u, v$  et  $w$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ ), donc d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, d[ \subset ]a, b[$  tel que

$$0 = f''(c) = \begin{pmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4 :**

1. On note  $v(t) = f(t) \wedge f'(t)$ . La fonction  $f$  est dérivable et on a

$$f''(t) = f'(t) \wedge f'(t) + f(t) \wedge f''(t) = 0$$

par hypothèse. Ainsi, l'application  $v$  est constante.

2. Comme  $f(a)$  et  $f'(a)$  ne sont pas colinéaires, leur produit vectoriel  $v(a)$  est un vecteur non nul. Comme l'application  $v$  est constante, on en déduit que

$$\forall t \in I, \quad (f(t) | v(a)) = (f(t) | v(t)) = 0.$$

On en déduit que les valeurs prises par  $f(t)$  sont contenues dans le plan de vecteur normal  $v(a)$  et passant par l'origine.

3. Par hypothèse, pour tout réel  $t \in I$ , il existe un réel  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(t) = \lambda(t)f(t)$ . En notant  $x, y$  et  $z$  les coordonnées de  $f$ , on obtient les équations différentielles

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z.$$

Comme  $f$  ne s'annule pas, on peut écrire au voisinage de chaque point de  $I$  la fonction  $\lambda$  comme  $x'/x, y'/y$  ou  $z'/z$ . On en déduit que la fonction  $\lambda$  est

continue sur  $I$ . En notant  $\Lambda$  une primitive de  $\lambda$  sur  $I$ , puis en résolvant les trois équations différentielles ci-dessus, on conclut qu'il existe  $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$f(t) = \begin{pmatrix} Ae^{\Lambda(t)} \\ Be^{\Lambda(t)} \\ Ce^{\Lambda(t)} \end{pmatrix} = e^{\Lambda(t)} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs prises par  $f(t)$  sont incluses dans la droite vectorielle dirigée par le vecteur  $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 5 :** En utilisant les développements limités usuels, on trouve

- (i)  $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$
- (ii)  $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 1/24 \\ 1/24 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$
- (iii)  $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/8 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$
- (iv)  $f(1+t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \pi^2/2 \\ 6 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} -\pi^4/8 \\ 1 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$
- (v)  $f(\pi+t) = \begin{pmatrix} -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -e^\pi/3 \\ -1 \end{pmatrix} t^3 + o(t^4),$
- (vi)  $f(1+t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 11/12 \\ 1/3 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4).$

**Exercice 6 :** La fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, +\infty[$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Ox)$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2}.$$

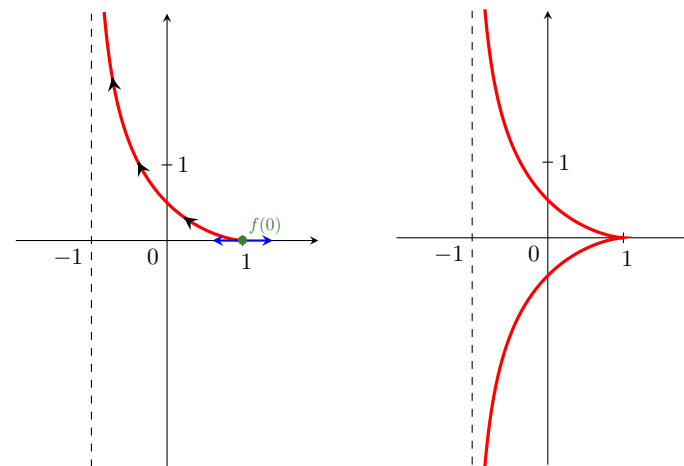
On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	-
$x$	1	$\rightarrow -1$
$y'(t)$	0	+
$y$	0	$\rightarrow +\infty$

Pour déterminer la tangente  $f(0)$  qui est un point singulier, on calcule un développement limité de  $f$  en 0. On a

$$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{t^3}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2),$$

donc la tangente en  $f(0)$  est horizontale. On en déduit le tracé sur  $[0, +\infty[$ , puis en appliquant la symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ , on obtient le tracé sur  $\mathbb{R}$ .



**Exercice 7 :** La fonction  $x$  est impaire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, +\infty[$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport au point  $O$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

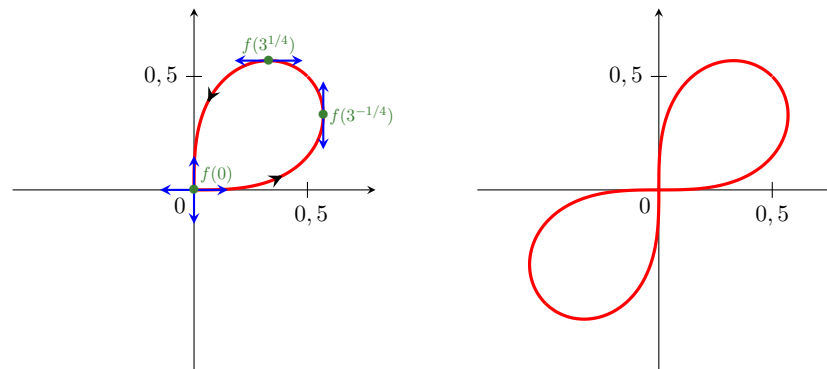
$$x'(t) = \frac{1 - 3t^4}{(1 + t^4)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t^2(3 - t^4)}{(1 + t^4)^2}.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	0	$3^{-1/4}$	$3^{1/4}$	$+\infty$
$x'(t)$		+	0	-
$x$	0	$\nearrow \frac{3^{3/4}}{4}$	$\searrow \frac{3^{1/4}}{4}$	0
$y'(t)$	0	+	0	-
$y$	0	$\nearrow \frac{3^{1/4}}{4}$	$\searrow \frac{3^{3/4}}{4}$	0

Les tangentes en  $f(0)$  et  $f(3^{1/4})$  est horizontale et la tangente en  $f(3^{-1/4})$  est verticale. On peut aussi remarquer que  $f'(t) \rightarrow (0, -1)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , donc la tangente en  $f(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  est verticale.

On en déduit le tracé sur  $[0, +\infty[$ , puis en appliquant la symétrie par rapport au point  $O$ , on obtient le tracé sur  $\mathbb{R}$ .



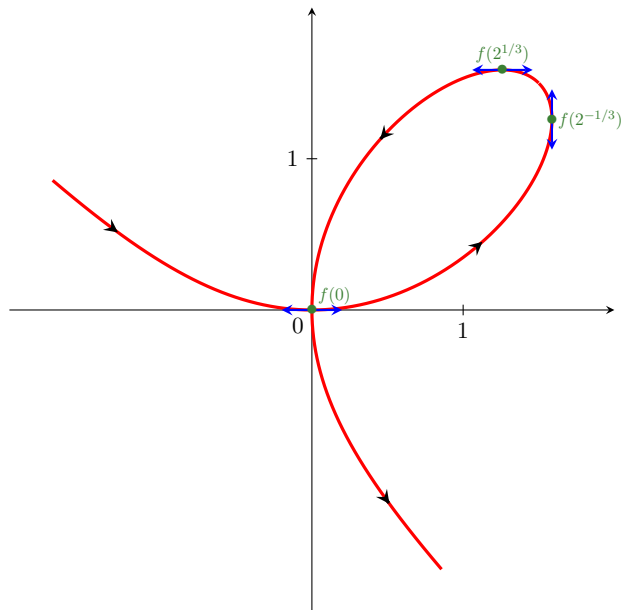
**Exercice 8 :** Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = \frac{3(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{3t(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	$-\infty$	-1	0	$2^{-1/3}$	$2^{1/3}$	$+\infty$
$x'(t)$		+	+	0	-	
$x$	0	$\nearrow +\infty$	$-\infty$	$\nearrow 2^{2/3}$	$\searrow 2^{1/3}$	0
$y'(t)$		-	-	0	+	0
$y$	0	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 2^{1/3}$	$\searrow 2^{2/3}$

Les tangentes en  $f(0)$  et  $f(2^{1/3})$  est horizontale. La tangente en  $f(2^{-1/3})$  est verticale. On en déduit le tracé sur  $\mathbb{R}$ .



**Exercice 9 :** La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut donc restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ . De plus, la fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Ox)$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

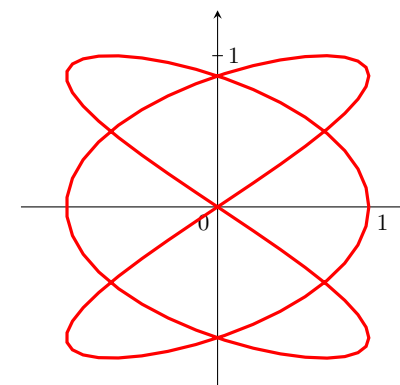
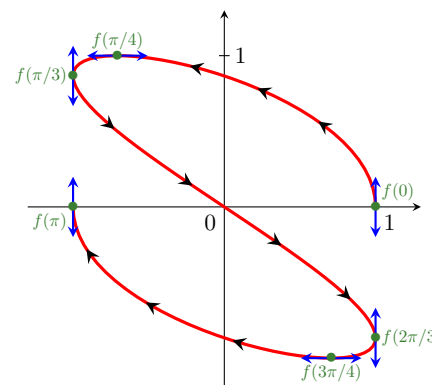
$$x'(t) = -3 \sin(3t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2 \cos(2t).$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$x'(t)$	0	-	0	+	0	0
$x$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$y'(t)$	+	0	-	0	+	
$y$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1

Avec le tableau de variation, on observe qu'au point  $f(t)$  pour  $t = 0, \pi/3, 2\pi/3$  ou  $t = \pi$ , la tangente à la courbe est verticale. De même, on observe qu'au point  $f(t)$  pour  $t = \pi/4$  ou  $3\pi/4$ , la tangente à la courbe est horizontale.

On en déduit le tracé sur  $[0, \pi]$ , puis avec une symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$  sur  $[-\pi, \pi]$ .



**Exercice 10 :** La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut donc restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ . De plus, la fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Ox)$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = -4 \sin(2t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3 \cos(3t).$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

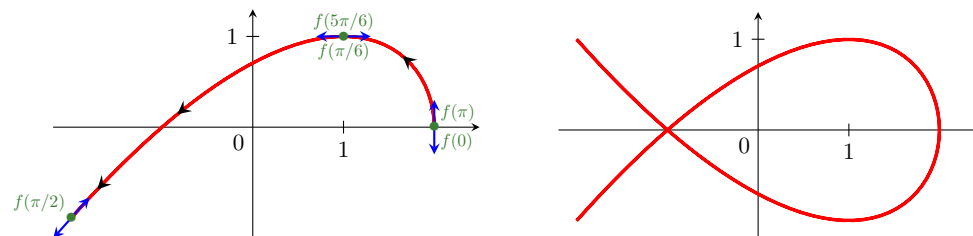
$t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$x'(t)$	0	-	0	+	0
$x$	2	1	-2	1	2
$y'(t)$		+ 0	- 0	+ 0	-
$y$	0	1	-1	1	0

La tangente au point  $f(0)$  et  $f(\pi)$  est verticale. La tangente au point  $f(\pi/6)$  et  $f(5\pi/6)$  est horizontale. Pour déterminer la tangente au point  $f(\pi/2)$  qui est singulier, on calcule les dérivées successives de  $f$  en  $\pi/2$ . On trouve

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix},$$

donc la tangente en  $f(\pi/2)$  est dirigé par le vecteur  $(8, 9)$ .

On en déduit le tracé sur  $[0, \pi]$ , puis en appliquant une symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$  sur  $[-\pi, \pi]$ .



**Exercice 11 :** La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut donc restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ . De plus, la fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Ox)$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = -2 \sin(t) - 2 \sin(2t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2 \cos(t) - 2 \cos(2t).$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$x'(t)$	0	- 0	+ 0
$x$	3	$-\frac{3}{2}$	-1
$y'(t)$	0	+ 0	-
$y$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

La tangente au point  $f(\pi)$  est verticale. Pour déterminer la tangente au point  $f(0)$  qui est singulier, on calcule les dérivées successives de la fonction  $f$  en 0. On trouve

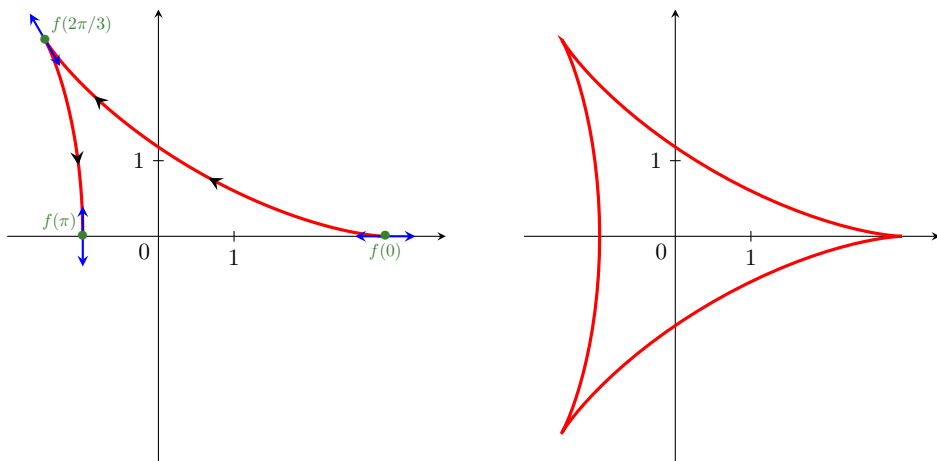
$$f''(0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc la tangente en  $f(0)$  est horizontale. De même, pour le point  $f(2\pi/3)$ , on trouve

$$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

donc la tangente en  $f(2\pi/3)$  est dirigé par le vecteur  $(1, -\sqrt{3})$ .

On en déduit le tracé sur  $[0, \pi]$ , puis avec une symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$  sur  $[-\pi, \pi]$ .



**Exercice 12 :**

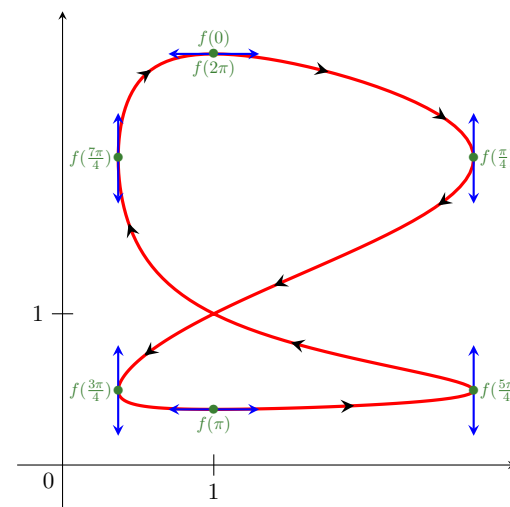
- La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut donc restreindre l'étude à  $[0, 2\pi]$ . Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = 2 \cos(2t) \exp(\sin(2t)) \quad \text{et} \quad y'(t) = -\sin(t) \exp(\cos(t)).$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$x'(t)$	+	0	-	0	+	0	-
$x$	1	$e$	$e^{-1}$	1	$e$	$e^{-1}$	1
$y'(t)$	0	-	0	+	0	-	0
$y$	$e$	$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$e^{-1}$	$e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$e$

La tangente au point  $f(0)$ ,  $f(\pi)$  et  $f(2\pi)$  est horizontale. La tangente au point  $f(\pi/4)$ ,  $f(3\pi/4)$ ,  $f(5\pi/4)$  et  $f(7\pi/4)$  est verticale. On en déduit le tracé sur  $[-\pi, \pi]$ .



2. On cherche à résoudre pour  $-\pi \leq t < s < \pi$  l'équation  $f(t) = f(s)$ , ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} \sin(2t) = \sin(2s) \\ \cos(t) = \cos(s). \end{cases}$$

La seconde équation donne  $s = -t$ , tandis que la première équation équivaut à

$$t = s[\pi] \quad \text{ou} \quad t = \frac{\pi}{2} - s[\pi].$$

En combinant avec l'équation précédente, la seule solution est  $t = -\pi/2$  et  $s = \pi/2$ . Finalement, la courbe paramétrée par  $f$  admet un unique point double qui est  $(1, 1) = f(\pi/2) = f(-\pi/2)$ .

3. La tangente en  $f(\pi/2) = (1, 1)$  est dirigée par  $f'(\pi/2) = (-2, -1)$ . Comme elle passe par le point  $(1, 1)$ , on en déduit qu'une équation de la tangente est  $2y = x + 1$ .

De même, une équation de la tangente en  $f(-\pi/2) = (1, 1)$  est  $2y = -x + 3$ .

### Exercice 13 :

1. Si  $f(t)$  est un point d'inflexion, alors les vecteurs  $f'(t)$  et  $f''(t)$  sont colinéaires. Si on note  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\det_{\mathcal{C}}(f'(t), f''(t)) = \begin{vmatrix} 3(t-2)^2 & 6(t-2) \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = -6(t-2)(t+2).$$

Ainsi, les points d'inflexions possibles sont  $f(2)$  et  $f(-2)$ . On a

$$f(2+t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ (2+t)^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$

Avec les notations du cours, on a  $p = 1$  et  $q = 3$ , donc  $f(2)$  est un point d'inflexion de la courbe paramétrée par  $f$ . De même, on a

$$f(-2+t) = \begin{pmatrix} -64 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$

Avec les notations du cours, on a  $p = 1$  et  $q = 3$ , donc  $f(-2)$  est un point d'inflexion de la courbe paramétrée par  $f$ .

2. La tangente en  $f(2) = (0, 0)$  est dirigée par  $f'(2) = (0, 4)$ , donc une équation de la tangente en  $f(2)$  est  $x = 0$ .

La tangente en  $f(-2) = (-64, 0)$  est dirigée par  $f'(-2) = (48, -4)$ , donc une équation de la tangente en  $f(-2)$  est  $12y + x + 64 = 0$ .

### Exercice 14 :

1. Si  $f(t)$  est un point d'inflexion, alors les vecteurs  $f'(t)$  et  $f''(t)$  sont colinéaires. Si on note  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\det_{\mathcal{C}}(f'(t), f''(t)) = \begin{vmatrix} e^t & e^t \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 2e^t(1-t).$$

Ainsi, le point d'inflexion possible est  $f(1)$ . On a

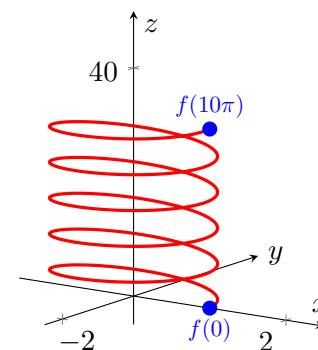
$$f(1+t) = \begin{pmatrix} e^{1+t} \\ (1+t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} e/2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} e/6 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$

Avec les notations du cours, on a  $p = 1$  et  $q = 3$ , donc  $f(1)$  est un point d'inflexion de la courbe paramétrée par  $f$ .

2. La tangente en  $f(1) = (e, 1)$  est dirigée par  $f'(1) = (e, 2)$ , donc une équation de la tangente en  $f(1)$  est  $2x - ey - e = 0$ .

### Exercice 15 :

On peut représenter la courbe paramétrée par  $f$ .



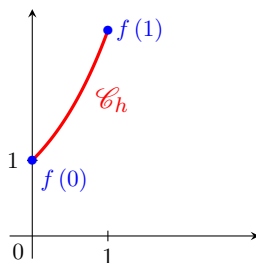
La fonction  $f : [0, 10\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dérivable et on a

$$\forall t \in [0, 10\pi], \quad f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1).$$

On obtient donc  $\|f'(t)\| = \sqrt{2}$ , puis

$$L = \int_0^{10\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{10\pi} \sqrt{2} dt = 10\pi\sqrt{2}.$$

**Exercice 16 :** On peut représenter la courbe représentative de  $h$ .



La courbe  $\mathcal{C}_h$  est paramétrée par  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(t) = (t, \exp(t))$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) = (1, \exp(t)).$$

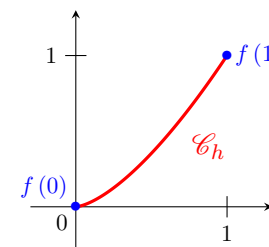
On obtient donc  $\|f'(t)\| = (1 + e^{2t})^{1/2}$ , puis

$$L = \int_0^1 \|f'(t)\| dt = \int_0^1 (1 + e^{2t})^{1/2} dt.$$

En procédant au changement de variable  $u = (1 + e^{2t})^{1/2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{u^2}{u^2 - 1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \left[ u + \frac{1}{2} (\ln(u-1) - \ln(u+1)) \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \\ &= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{1+e^2} - 1) - \ln(\sqrt{2} - 1) - 1. \end{aligned}$$

**Exercice 17 :** On peut représenter la courbe représentative de  $h$ .



La courbe  $\mathcal{C}_h$  est paramétrée par  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(t) = (t, t^{3/2})$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f'(t) = \left( 1, \frac{3}{2}\sqrt{t} \right).$$

On obtient donc  $\|f'(t)\| = \left( 1 + \frac{9}{4}t \right)^{1/2}$ , puis

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \|f'(t)\| dt = \int_0^1 \left( 1 + \frac{9}{4}t \right)^{1/2} dt \\ &= \left[ \frac{8}{27} \left( 1 + \frac{9}{4}t \right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}. \end{aligned}$$

**Exercice 18 :**

1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(t + 2\pi) = f(t) + (2\pi, 0).$$

On en déduit que pour passer de  $f(t)$  à  $f(t + 2\pi)$ , on utilise la translation de vecteur  $(2\pi, 0)$ .

2. D'après la relation précédente, on peut restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant les translations de vecteur  $(2k\pi, 0)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . De plus, la fonction  $x$  est impaire et la fonction  $y$  est paire, donc on



peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Oy)$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = 1 - \cos(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = \sin(t).$$

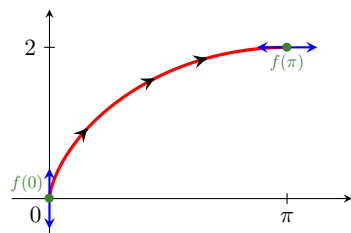
On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	0	$\pi$	
$x'(t)$	0	+	
$x$	0	$\nearrow \pi$	
$y'(t)$	0	+	0
$y$	0	$\nearrow 2$	

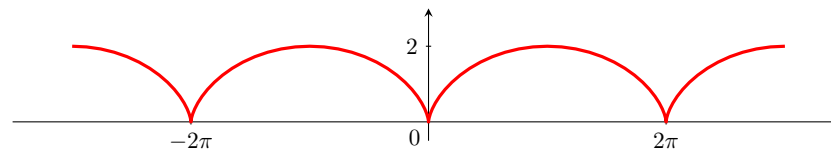
La tangente en  $f(\pi)$  est horizontale. Pour déterminer la tangente en  $f(0)$  qui est un point singulier, on calcule un développement limité de  $f$  en 0. On a

$$f(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2),$$

donc la tangente en  $f(0)$  est verticale. On en déduit le tracé sur  $[0, \pi]$ .



En appliquant la symétrie par rapport à l'axe  $(Oy)$ , on en déduit la tracé sur  $[-\pi, \pi]$ , puis en appliquant les translations de vecteur  $(2k\pi, 0)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on obtient le tracé sur  $\mathbb{R}$ .



3. Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ , on a

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= [(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2]^{1/2} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2 \left[ -2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8.$$

**Exercice 19 :**

1. La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut donc restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ . De plus, la fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Ox)$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t).$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

$t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$x'(t)$	0	-	0
$x$	1	0	-1
$y'(t)$	0	+	0
$y$	0	1	0

Pour déterminer les tangentes en  $f(0)$ ,  $f(\pi/2)$  et  $f(\pi)$  qui sont des points singuliers, on calcule des développements limités. On a

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2),$$

donc la tangente en  $f(0)$  est horizontale. On a

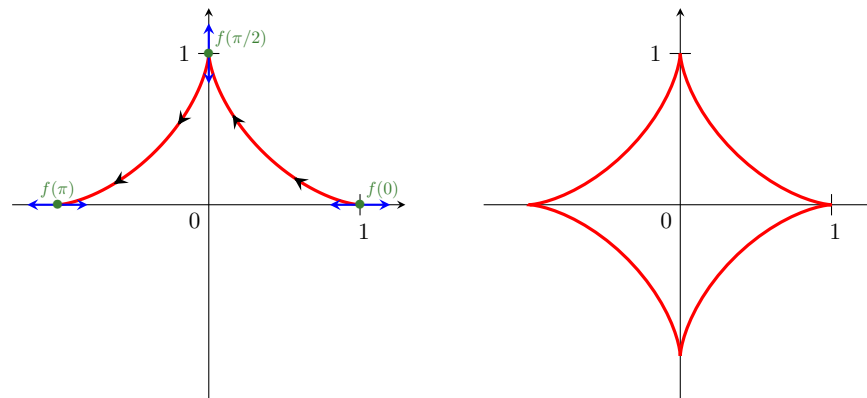
$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) &= \begin{pmatrix} \cos^3(\pi/2 + t) \\ \sin^3(\pi/2 + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^3(t) \\ \cos^3(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2), \end{aligned}$$

donc la tangente en  $f(\pi/2)$  est verticale. On a

$$\begin{aligned} f(\pi + t) &= \begin{pmatrix} \cos^3(\pi + t) \\ \sin^3(\pi + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3(t) \\ -\sin^3(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + o(t^2), \end{aligned}$$

donc la tangente en  $f(\pi)$  est horizontale.

On en déduit le tracé sur  $[0, \pi]$ , puis en appliquant la symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ , on obtient le tracé sur  $[-\pi, \pi]$ .



2. Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ , on a

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= [(-3 \sin(t) \cos^2(t))^2 + (3 \cos(t) \sin^2(t))^2]^{1/2} \\ &= 3\sqrt{\cos^2(t) \sin^2(t)} = 3|\cos(t) \sin(t)|. \end{aligned}$$

Comme la fonction  $t \mapsto 3|\cos(t) \sin(t)|$  est  $\pi/2$ -périodique, on obtient

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = 4 \int_0^{\pi/2} 3 \cos(t) \sin(t) dt \\ &= 6 \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = 3[-\cos(2t)]_0^{\pi/2} = 6. \end{aligned}$$

**Exercice 20 :**

1. La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on peut donc restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ . De plus, la fonction  $x$  est paire et la fonction  $y$  est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à  $[0, \pi]$ . Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à  $(Ox)$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont dérivables et on a

$$x'(t) = -2 \sin(t) - 2 \sin(2t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2 \cos(t) + 2 \cos(2t).$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

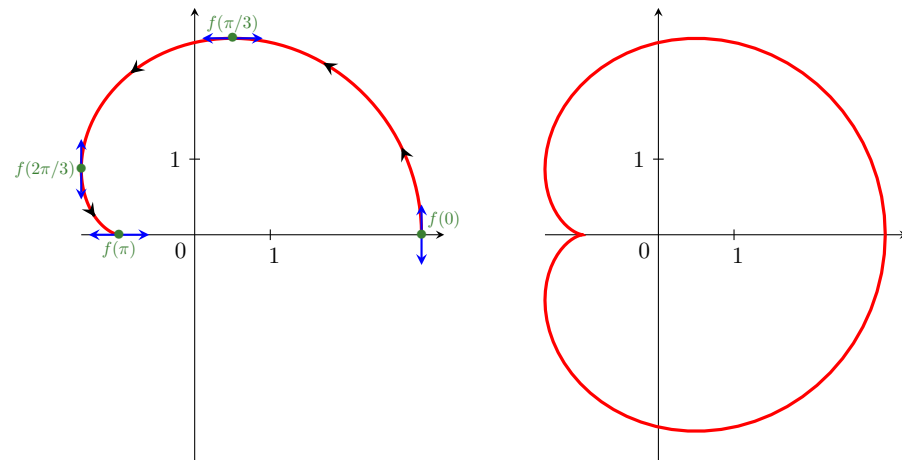
$t$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$x'(t)$	0	-	0	+ 0
$x$	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1
$y'(t)$		+	0	-
$y$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Avec le tableau de variation, on observe qu'aux points  $f(0)$  et  $f(2\pi/3)$ , la tangente à la courbe est verticale. De même, on observe qu'au point  $f(\pi/3)$ , la tangente à la courbe est horizontale. Pour déterminer la tangente en  $f(\pi)$  qui est un point singulier, on calcule les dérivées successives de la fonction  $f$  en  $\pi$ . On trouve

$$f''(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la tangente en  $f(\pi)$  est horizontale.

On en déduit le tracé sur  $[0, \pi]$ , puis en appliquant la symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ , on obtient le tracé sur  $[-\pi, \pi]$ .



2. Par symétrie, la longueur de la courbe est le double de la longueur de  $f(0)$  à  $f(\pi)$ . Pour tout  $t \in [0, \pi]$ , on a

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= [(-2 \sin(t) - 2 \sin(2t))^2 + (2 \cos(t) + 2 \cos(2t))^2]^{1/2} \\ &= 2\sqrt{2 + 2 \cos(t)} = 4\sqrt{\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2} = 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$L = 2 \int_0^\pi \|f'(t)\| dt = 8 \int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8 \left[ 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^\pi = 16.$$