Chapitre 8
Espaces préhilbertiens

Exercice 1 :

1. On démontre que l'application vérifie la définition.
   - Symétrie : si $(f,g) \in E^2$, on a
   $$\begin{aligned}(g \mid f) &= g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t)dt \\ &= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = (f \mid g).\end{aligned}$$
   - Linéarité 1$^{\text{re}}$ variable : si $(f,g,h) \in E^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g \mid h) &= (\lambda f + \mu g)(0)h(0) + \int_0^1 (\lambda f + \mu g)'(t)h'(t)dt \\ &= \lambda f(0)h(0) + \mu g(0)h(0) + \int_0^1 \lambda f'(t)h'(t) + \mu g'(t)h'(t)dt \\ &= \lambda\left(f(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t)dt\right) \\ &\qquad + \mu\left(g(0)h(0) + \int_0^1 g'(t)h'(t)dt\right) \\ &= \lambda(f \mid h) + \mu(g \mid h).\end{aligned}$$
   - Linéarité 2$^{\text{e}}$ variable : l'application est linéaire par rapport à la 1$^{\text{re}}$ variable et symétrique, donc elle est linéaire par rapport à la 2$^{\text{e}}$ variable.
   - Positivité : si $f \in E$, on a
   $$(f \mid f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geqslant 0.$$
   - Définie : si $f \in E$ telle que $(f \mid f) = 0$, alors comme chaque terme de la somme est positif, on obtient
   $$f(0)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'(t)^2 dt = 0.$$

   La fonction $(f')^2$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, donc elle est nulle. Ainsi $f' = 0$, donc f est constante sur $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, on trouve $f = 0$.
2. On a
$$(\cos \mid \sin) = \cos(0)\sin(0) - \int_0^1 \sin(t)\cos(t)dt = \left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sin^2(1),$$
$$(\mathrm{Id} \mid \exp) = \mathrm{Id}(0)\exp(0) + \int_0^1 \exp(t)dt = [\exp(t)]_0^1 = e - 1.$$
3. En linéarisant pour les deux premières intégrales, on trouve
$$\|\cos\|^2 = (\cos \mid \cos) = \cos^2(0) + \int_0^1 \sin^2(t)dt = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin(2),$$
$$\|\sin\|^2 = (\sin \mid \sin) = \sin^2(0) + \int_0^1 \cos^2(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2),$$
donc $\|\cos\| = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\sin(2)}$ et $\|\sin\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2)}$. De plus, on a
$$\|\exp\|^2 = (\exp \mid \exp) = \exp^2(0) + \int_0^1 \exp^2(t)dt = 1 + \frac{1}{2}(e^2 - 1),$$
donc $\|\exp\| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}(e^2 - 1)}$.
4. Pour $(f,g) \in E^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est
$$\begin{aligned}&\left|f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\right| \\ &\qquad \leqslant \left(f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2}\left(g^2(0) + \int_0^1 g'(t)^2 dt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. On démontre que l'application vérifie la définition.
   - Symétrie et Bilinéarité : Elle sont faciles à montrer.
   - Positivité : Si $P \in E$, on a
   $$(P \mid P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geqslant 0.$$
   - Définie : Si $P \in E$ telle que $(P \mid P) = 0$, alors le polynôme P admet $0, 1$ et 2 comme racine. Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que $P = 0$ (sinon P aurait au plus deux racines).
2. En prenant $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$, on a
   $$(X^2 + 1 \mid X^2 + X + 1) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 42.$$
   En prenant $P(X) = X^2 - 3X$ et $Q(X) = 2X - 1$, on a
   $$(X^2 + 1 \mid X^2 + X + 1) = 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 = -8.$$
3. De même, on a
   $$\begin{aligned} \|X^2 + 1\| &= \sqrt{(X^2 + 1 \mid X^2 + 1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5} = \sqrt{30}, \\ \|X^2 + X + 1\| &= \sqrt{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 7} = \sqrt{59}, \\ \|2X^2 - 5X\| &= \sqrt{0 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2)} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$, on a
   $$\begin{aligned} (x + 2y + 3z)^2 &= |((1, 2, 3) \mid (x, y, z))|^2 \\ &\leqslant \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leqslant 14. \end{aligned}$$
2. Dans le cas d'égalité, toutes les inégalités ci-dessus sont des inégalités. D'une part, on a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. D'autre part, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les vecteurs (x, y, z) et $(1, 2, 3)$ sont colinéaires d'après le cours. On en déduit que les cas d'égalités sont pour les vecteurs
   $$(x, y, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3).$$

Exercice 4 :

1. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$, on a
   $$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= \left|\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \mid \left(\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z\right)\right)\right|^2 \\ &\leqslant \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right)\left(2x^2 + y^2 + 5z^2\right) \\ &\leqslant \frac{17}{10}. \end{aligned}$$
2. Dans le cas d'égalité, toutes les inégalités ci-dessus sont des inégalités. D'une part, on a $2x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$. D'autre part, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc les vecteurs $(\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$ et $(2^{-1/2}, 1, 5^{-1/2})$ sont colinéaires d'après le cours. On en déduit que les cas d'égalités sont pour les vecteurs
   $$(x, y, z) = \pm\sqrt{\frac{10}{17}}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5}\right).$$

Exercice 5 :

1. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, on a
   $$\begin{aligned} (x_1 + \cdots + x_n)^2 &= |((1, \ldots, 1) \mid (x_1, \ldots, x_n))|^2 \\ &\leqslant \left(1^2 + \cdots + 1^2\right)\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) \\ &\leqslant n\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right). \end{aligned}$$
2. Dans le cas d'égalité, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc les vecteurs $(1, \ldots, 1)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ sont colinéaires d'après le cours. On en déduit que les cas d'égalités sont pour les vecteurs
   $$(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda, \ldots, \lambda) \quad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 : On a vu en cours que l'application donnée par
$$\forall (f, g) \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})^2, \quad (f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} I_{m+n} &= \int_0^1 \left(t^m\sqrt{f(t)}\right)\left(t^n\sqrt{f(t)}\right)dt \\ &\leqslant \left(\int_0^1 t^{2m}f(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 t^{2n}f(t)dt\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat en élevant au carré.

Exercice 7 : En effectuant la différence entre le second membre et le premier membres de l'inégalité, puis en utilisant l'identité du parallélogramme, on obtient

$$\begin{aligned} &2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right)-2-\|x+y\|^2 \\ &\qquad = 2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2+\|x\|^2\|y\|^2 \\ &\qquad = \|x-y\|^2+\|x\|^2\|y\|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Exercice 8 :

- Une base de F est $(u_1,u_2)=\big((1,0,1,-1),(0,1,1,0)\big)$. Par bilinéarité, on a

$$\begin{aligned} v=(x,y,z,t)\in F^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad (v\mid u_1)=0 \text{ et } (v\mid u_2)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x+z-t=0 \text{ et } y+z=0. \end{aligned}$$

  On en déduit que $F^\perp=\mathrm{Vect}\big((1,0,0,1),(0,-1,1,1)\big)$.
- Une base de G est $(u_1,u_2)=\big((1,-2,1,0),(1,0,0,-1)\big)$. Par bilinéarité, on a

$$\begin{aligned} v=(x,y,z,t)\in G^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad (v\mid u_1)=0 \text{ et } (v\mid u_2)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x-2y+z=0 \text{ et } x-t=0. \end{aligned}$$

  On en déduit que $G^\perp=\mathrm{Vect}\big((1,0,-1,1),(0,1,2,0)\big)$.

Exercice 9 :

1. Il est clair que F est une partie de $\mathbb{R}_2[X]$. On vérifie les autres points de la définition.
   - Le polynôme nul est dans F car il s'annule en 0.
   - Soient $P,Q\in F$. On a
   $$(P+Q)(0)=P(0)+Q(0)=0+0=0,$$
   donc $P+Q\in F$.
   - Soient $P\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a
   $$(\lambda P)(0)=\lambda P(0)=\lambda\cdot 0=0,$$
   donc $\lambda P\in F$.

   On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. De même, G est une partie de $\mathbb{R}_2[X]$ et on a
   - Le vecteur $0_{\mathbb{R}_2[X]}\in G$ car $\int_0^1 0dt=0$.
   - Soient $P,Q\in G$. On a
   $$\int_0^1(P+Q)(t)dt=\int_0^1 P(t)dt+\int_0^1 Q(t)dt=0+0=0,$$
   donc $P+Q\in G$.
   - Soient $P\in G$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a
   $$\int_0^1(\lambda P)(t)dt=\lambda\int_0^1 P(t)dt=\lambda\cdot 0=0,$$
   donc $\lambda P\in G$.

   On a donc montré que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. En notant $P=aX^2+bX+c$, on a
$$P\in F \quad\Leftrightarrow\quad P(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad c=0.$$
   On en déduit que $F=\mathrm{Vect}(X,X^2)$. De même,
$$P\in G \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^1 P(t)dt=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0.$$
   On en déduit que $G=\mathrm{Vect}(2X-1,3X^2-1)$.

3. Par bilinéarité, on a

$$\begin{aligned} P = aX^2+bX+c \in F^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad (P \mid X) = 0 \ \text{ et } \ (P \mid X^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 9a+5b+3c = 0 \ \text{ et } \ 17a+9b+5c = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $F^\perp = \text{Vect}(X^2-3X+2)$. De même, on a

$$\begin{aligned} P = aX^2+bX+c \in G^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad (P \mid 2X-1) = 0 \ \text{ et } \ (P \mid 3X^2-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 13a+7b+3c = 0 \ \text{ et } \ 46a+24b+12c = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $G^\perp = \text{Vect}(6X^2-9X-5)$.

4. Si l'on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$, on a

$$(P_0 \mid P_1) = (P_0 \mid P_2) = (P_1 \mid P_2) = 0,$$

donc $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale. Comme elle est composée de polynôme non nul, la famille $\mathscr{B}$ est aussi libre d'après le cours, donc c'est une base orthogonale de E. Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de normaliser les vecteurs de la base précédente. Une base orthonormée de E est donc

$$\left(\frac{1}{2}X(X-1), X(X-2), \frac{1}{2}(X-1)(X-2)\right).$$

Exercice 10 :

1. Vu en cours.
2. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{Tr}(A)^2 = \left|(I_n \mid A)\right|^2 \leqslant \|I_n\|^2\|A\|^2 = n\text{Tr}(A^\text{T}A).$$

De plus, on a égalité si et seulement si les matrices I_n et A sont colinéaires, donc si et seulement si A est une matrice scalaire.

3. L'ensemble F est le noyau de la forme linéaire non nulle $\text{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1.
4. D'après le cours, on a $\dim(F^\perp) = 1$. De plus, on, remarque que $I_n \in F^\perp$, donc $F^\perp$ est l'ensemble des matrices scalaires.

Exercice 11 : En élevant l'inégalité au carré, en prenant la différence, puis en utilisant la bilinéarité, on a

$$0 \leqslant \|u+tv\|^2 - \|u\|^2 = 2t(u \mid v) + t^2\|v\|.$$

Le membre de droite est une fonction polynomiale du second degré positive en t, ce qui implique nécessairement que $(u \mid v) = 0$, donc u et v sont orthogonaux.

Exercice 12 :

1. On raisonne par double inclusion.
   - Si $u \in (F+G)^\perp$, alors il est orthogonal à tous les éléments de $F+G$. En particulier, il est orthogonal à tous les éléments de F et tous les éléments de G, donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
   - Soit $u \in F^\perp \cap G^\perp$. Si $x \in F+G$, alors il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $x = f+g$ et on a

$$(u \mid x) = (u \mid f) + (u \mid g) = 0.$$

   Donc $u \in (F+G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

2. Soit $u \in F^\perp + G^\perp$. Alors il existe $(v,w) \in F^\perp \times G^\perp$ tel que $u = v+w$. Pour tout $x \in F \cap G$, on a donc

$$(u \mid x) = (v \mid x) + (w \mid x) = 0.$$

Ainsi $u \in (F \cap G)^\perp$ et on a montré l'inclusion. Dans un espace euclidien, on peut comparer les dimensions. D'une part, avec le cours, on a

$$\dim\left((F \cap G)^\perp\right) = \dim E - \dim(F \cap G).$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la première question

$$\begin{aligned} \dim\left(F^\perp + G^\perp\right) &= \dim\left(F^\perp\right) + \dim\left(G^\perp\right) - \dim\left(F^\perp \cap G^\perp\right) \\ &= \dim(E) - \dim(F) + \dim(E) - \dim(G) - \dim\left((F+G)^\perp\right) \\ &= 2\dim(E) - \dim(F) - \dim(G) - (\dim(E) - \dim(F+G)) \\ &= \dim(E) - (\dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G)) \\ &= \dim(E) - \dim(F \cap G). \end{aligned}$$

Les deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension, donc ils sont égaux.

3. Soit $f \in F$. Pour tout $g \in F^\perp$, on a $(f \mid g) = 0$, donc $f \in (F^\perp)^\perp$, d'où l'inclusion. Dans un espace euclidien, on peut comparer les dimensions,

$$\dim\left((F^\perp)^\perp\right) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F).$$

Les deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension , donc ils sont égaux.

Exercice 13 :

1. Si $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on a

$$\overline{(P \mid Q)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})Q(e^{-it})}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{-it})Q(e^{it})dt.$$

Finalement, en posant $u = -t$, on obtient $\overline{(P \mid Q)} = (P \mid Q)$, donc le nombre $(P \mid Q)$ est réel.

2. On démontre que l'application vérifie la définition.
   - Symétrie : On la déduit du même changement de variable que ci-dessus.
   - Bilinéarité : Démonstration analogue à l'exercice 1.
   - Positivité : Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

   $$(P \mid P) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it})P(e^{-it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|^2 dt \geqslant 0.$$

   - Définie : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $(P \mid P) = 0$, alors la fonction $t \mapsto |P(e^{it})|^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-\pi, 2\pi]$, donc elle est nulle sur $[-\pi,\pi]$. On en déduit que le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$.

3. Si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$, alors

$$(X^m \mid X^n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(m-n)}dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{it(m-n)}}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\|X^m\|^2 = (X^m \mid X^m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(m-m)}dt = 1.$$

Ainsi la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ est orthonormée.

Exercice 14 :

1. Vu en cours.
2. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de E, on trouve la base orthogonale

$$\left(1, X - \frac{1}{2}, X^2 - X + \frac{1}{6}\right).$$

En normalisant, on en déduit que

$$\left(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)\right)$$

est une base orthonormée de E.

Exercice 15 :

- En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de F donnée dans l'énoncé, on trouve qu'une base orthonormée de F est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{15}}(-1,3,2,1)\right).$$

- En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de G donnée dans l'énoncé, on trouve qu'une base orthonormée de G est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{66}}(5,2,-1,6)\right).$$

Exercice 16 :

1. Comme $\dim H^\perp = 1 < 2 = \dim H$, il est plus rapide de calculer la projection orthogonale sur $H^\perp$. Comme H est le plan d'équation

$$x - 2y + z = 0 \Leftrightarrow \left((1,-2,1) \mid (x,y,z)\right) = 0,$$

on obtient qu'une base de $H^\perp$ est $(1,-2,1)$. On en déduit une base orthonormée de $H^\perp$ en posant $e = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$, puis d'après le cours, en notant $u=(x,y,z)$, on a

$$p_{H^\perp}(u) = (u \mid e)e = \frac{1}{6}(x-2y+z, -2x+4y-2z, x-2y+z).$$

Avec la relation $p_H + p_{H^\perp} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit

$$p_H(u) = u - p_{H^\perp}(u) = \frac{1}{6}(5x+2y-z, 2x+2y+2z, -x+2y+5z).$$

2. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} d((a,b,c),H) &= \|(a,b,c) - p_H(a,b,c)\| = \|p_{H^\perp}(a,b,c)\| \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{(a-2b+c)^2 + (-2a+4b-2c)^2 + (a-2b+c)^2} \\ &= \frac{|a-2b+c|}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Exercice 17 :

1. On remarque facilement qu'une base orthonormée de F est donnée par

$$(u_1,u_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)\right).$$

Ainsi, en notant $v=(x,y,z,t)$, on en déduit

$$p_F(v) = (v \mid u_1)u_1 + (v \mid u_2)u_2 = \frac{1}{2}\left(x-z, y-t, z-x, t-y\right).$$

2. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} d((a,b,c,d),F) &= \|(a,b,c,d) - p_F(a,b,c,d)\| \\ &= \frac{1}{2}\|(a+c, b+d, a+c, b+d)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 18 :

1. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(1,X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, on trouve que

$$\mathscr{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Comme $(1,X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, on a part bilinéarité que $P = aX^2+bX+c \in E$ vérifie

$$\begin{aligned} P \in F^\perp &\Leftrightarrow (P \mid 1) = 0 \text{ et } (P \mid X) = 0 \\ &\Leftrightarrow P(0)+P(1)+P(2) = 0 \text{ et } P(1)+2P(2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5a+3b+3c = 0 \text{ et } 9a+5b+3c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 3c \text{ et } b = -6c. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \mathrm{Vect}(3X^2-6X+1)$ et une base orthonormée de ce dernier est $E = \frac{1}{\sqrt{6}}(3X^2-6X+1)$.

3. Le plus rapide est de commencer par calculer la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]^\perp$. Avec la formule du cours, on a

$$p_{\mathbb{R}_1[X]^\perp}(P) = (P \mid E)E.$$

On en déduit que la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$ est définie par

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(P) = P - (P \mid E)E.$$

En notant $P = aX^2+bX+c$, on trouve

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(P) = (2a+b)X + \frac{1}{3}(3c-a).$$

4. Finalement, d'après le cours, on a

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|p_{\mathbb{R}_1[X]^\perp}(X^2)\| = |(X^2 \mid E)| = \frac{|0-2+4|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 19 : On a vu que l'application donnée par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Par définition, on doit calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \left\| X^2 - P \right\|^2 = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2.$$

Il faut donc calculer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. D'après l'exercice 14, une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ est $E = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$. On en déduit avec le cours que

$$p_{\mathbb{R}_1[X]^\perp}(X^2) = (X^2 \mid E)E,$$

puis que

$$d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|p_{\mathbb{R}_1[X]^\perp}(X^2)\|^2 = |(X^2 \mid E)|^2 = \frac{1}{180}.$$