Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de ce problème est de calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Cette intégrale est appelée l'intégrale de Dirichlet.

I. Convergence de l'intégrale de Dirichlet

On introduit les intégrales

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

I.1) Montrer que l'intégrale I_1 est convergente.

I.2) Montrer que pour tout réel $\beta > \pi$, on a

$$\int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1}{\pi} - \frac{\cos(\beta)}{\beta} - \int_{\pi}^{\beta} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

I.3) En déduire que l'intégrale I_2 est convergente.

I.4) Conclure que l'intégrale de Dirichlet est convergente.

II. Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'intégrale

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} dt.$$

II.1) Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2) En utilisant la formule d'Euler, montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

II.3) En déduire que $J_{n+1} - J_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.4) Conclure que $J_n = \pi/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Tournez svp

III. Étude d'une fonction

On définit la fonction $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}.$$

III.1) Montrer que la fonction φ est continue sur $[0, \pi/2]$.

III.2) Montrer que la fonction φ est dérivable sur $]0, \pi/2]$ et que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi'(t) = \frac{t^2 \cos(t) - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)}.$$

III.3) Montrer que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi'(t) = -1/6$.

III.4) En déduire que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

III.5) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \varphi'(t) \cos\big((2n+1)t\big) dt = 0.$$

III.6) En utilisant une intégration par partie, conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin\big((2n+1)t\big) dt = 0.$$

IV. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'intégrale

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} dt.$$

IV.1) Montrer que l'intégrale K_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.2) A l'aide d'un changement de variable, montrer que la suite (K_n) converge vers I.

IV.3) En utilisant le résultat de la question III.6), montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n - J_n = 0$.

IV.4) Conclure que la suite (K_n) converge vers $\pi/2$.

IV.5) Quelle est la valeur de l'intégrale de Dirichlet I ?

Fin du Problème