Corrigé de la séance de révision n° 1

Exercice 1

1.(a) Procédons par intégration par parties. Pour $n \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos \times \cos^{n+1} \underset{\text{IPP}}{=} \Big[\sin \times \cos^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 \times \cos^n \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2) \times \cos^n = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}\,, \end{aligned}$$

d'où la formule de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n\,. \tag{$\star$}$$

1.(b) On écrit les premières relations, par exemple pour exprimer I_{2n} :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times I_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times I_0\,.$$

Or le dénominateur vaut $2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = 2^n\, n!$ et le numérateur vaut $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n\, n!}$ et enfin $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\,.$$

Pour exprimer I_{2n+1}, on procède de manière analogue, et on obtient

$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

2.(a) • On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \forall\, t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\,, \quad 0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

d'où, en intégrant l'encadrement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n\,,$$

ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

• Notons que I_n est en fait **strictement** positive (car $t \mapsto \cos^n t$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, positive et n'est pas la fonction nulle). La suite étant décroissante on peut écrire pour tout entier n,

$$\frac{n+1}{n+2} \underset{(\star)}{=} \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \frac{I_n}{I_n} = 1\,,$$

donc d'après le théorème de l'étau, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ comme voulu.

2.(b) On a $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 1$, donc montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, c'est montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad J_n = J_0 = I_0 I_1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad (n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}\,.$$

► *1re méthode* : montrons la formule par récurrence sur l'entier n. Elle vaut pour $n = 0$, et si on la suppose vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} \underset{(\star)}{=} (n+1)I_n I_{n+1} \underset{\text{HR}}{=} \frac{\pi}{2}\,,$$

ce qui montre que la formule vaut pour l'entier $n+1$.

▸ *2^{de} méthode* : multiplions membre-à-membre les égalités $(k+2)I_{k+2} \underset{(\star)}{=} (k+1)I_k$ pour k variant de 0 à $n-1$. Ça donne

$$(n+1)!\, I_2 \cdots I_{n+1} \;=\; n!\, I_0 \cdots I_{n-1} \qquad \text{donc} \qquad (n+1) I_n I_{n+1} = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

2.(c) On a $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$ donc

$$(I_n)^2 \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}\, I_n \underset{2.(b)}{=} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}\,,$$

et donc (puissance d'équivalent) $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}\,.$

Exercice 2

1. Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On a $\forall\, t \in [0,1]\,,\ \dfrac{e^t}{y+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t}$ donc, en intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, il vient $f(y) \leqslant f(x)$, ce qui montre que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.(a) Soit $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$. Utilisons la linéarité de l'intégrale, et l'inégalité triangulaire pour écrire

$$|f(x) - f(x_0)| \;=\; \left| \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\, dt - \int_0^1 \frac{e^t}{x_0+t}\, dt \right| \;=\; \left| \int_0^1 \frac{e^t (x_0 - x)}{(x+t)(x_0+t)}\, dt \right| \underset{\text{IT}}{\leqslant} |x_0 - x| \int_0^1 \frac{e^t}{(x+t)(x_0+t)}\, dt\,,$$

et dans la dernière intégrale écrite, on majore e^t par e sur $[0,1]$, et on minore le dénominateur :

$$\forall\, t \in [0,1]\,, \quad (x+t)(x_0+t) \;\geqslant\; x x_0 \;\geqslant\; \frac{x_0^2}{2}\,,$$

et enfin on intègre l'inégalité obtenue sur $[0,1]$, ce qui donne

$$|f(x) - f(x_0)| \;\leqslant\; |x_0 - x| \times e \times \frac{2}{x_0^2}\,,$$

comme voulu.

2.(b) Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'inégalité précédente montre que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, donc f est continue au point x_0. Puisque c'est vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x > 0$. Encadrons, pour tout $t \in [0,1]$, $0 < x \leqslant x + t \leqslant x + 1$ donc $\dfrac{e^t}{x+1} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x}$, et en intégrant cet encadrement sur $[0,1]$, il vient

$$\forall\, x > 0\,, \quad \frac{1}{x+1} \int_0^1 e^t\, dt \;\leqslant\; f(x) \;\leqslant\; \frac{1}{x} \int_0^1 e^t\, dt\,,$$

ce qui est l'encadrement demandé puisque $\displaystyle\int_0^1 e^t\, dt = e - 1\,.$

On en déduit que

$$\forall\, x > 0\,, \quad \frac{x}{x+1} \;\leqslant\; \frac{x}{e-1} f(x) \;\leqslant\; 1 \qquad \text{donc} \qquad \frac{x}{e-1} f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1\,,$$

ce qui signifie que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}\,.$

4.(a) Soit $t \in [0,1]$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[0,t]$ à la fonction $u \mapsto e^u$, qui est de classe C^1 sur ce segment. On obtient

$$|e^t - 1| \;\leqslant\; |e^t - e^0| \;\leqslant\; |t - 0| \times \max_{u \in [0,t]} |e^u| \;=\; t \times e^t \;\leqslant\; t \times e\,,$$

ce qui est l'inégalité cherchée avec $M = e$.

4.(b) Écrivons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leqslant g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t}\,dt \underset{4.(a)}{\leqslant} e\int_0^1 \frac{t}{x+t}\,dt \leqslant e\int_0^1 \frac{x+t}{x+t}\,dt = e\,,$$

(par croissance de l'intégrale) et g est bien bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.(c) Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\forall\, x > 0\,, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1 + 1}{x+t}\,dt = g(x) + \int_0^1 \frac{dt}{x+t} = g(x) + \Big[\ln(x+t)\Big]_{t=0}^{t=1} = g(x) + \ln(x+1) - \ln x\,.$$

On en déduit que pour $x \in \,]0,1[\,$,

$$\frac{f(x)}{-\ln x} = \frac{g(x)}{-\ln x} + \frac{\ln(x+1)}{-\ln x} + 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1\,,$$

car g est bornée et $-\ln x$ tend vers $+\infty$. On a bien obtenu $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$.

Exercice 3

1. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-t^2}$ et G une primitive quelconque de g.
Puisque g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction G est également de classe C^∞, et on a $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = G(x^2) - G(x)$.
On en déduit que F est de classe C^∞ par composée et différence, et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}\,.$$

2. Puisque g est positive sur $\mathbb{R}$, le signe de $F(x)$ est celui de $x^2 - x = x(x-1)$, donc $F(x)$ est strictement négatif sur $\,]0,1[\,$, strictement positif sur $\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[\,$ et nul en 0 et en 1.

3. Lorsque $x \geqslant 1$, le segment $[x,x^2]$ est inclus dans $[1,+\infty[\,$, donc $\forall\, t \in [x,x^2]\,,\ t^2 \geqslant t$ d'où $0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$, et en intégrant cet encadrement sur $[x,x^2]$, on obtient

$$\forall\, x \geqslant 1\,, \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{x^2} e^{-t}\,dt = \Big[-e^{-t}\Big]_x^{x^2} = e^{-x} - e^{-x^2}\,.$$

On déduit de l'encadrement précédent et du théorème de l'étau que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 4

On rappelle le résultat du cours portant sur les sommes de Riemann : si f est continue sur le segment $[a,b]$, à valeurs réelles, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f\,.$$

Ici, on a donc $S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f$.

1.(a) Choisissons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et écrivons, grâce au résultat précédent,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln 2\,.$$

1.(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_n + \frac{1}{2}u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} = u_{2n}\,. \end{aligned}$$

1.(c) En passant à la limite dans l'identité $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ v_n = u_{2n} - \frac{1}{2}\, u_n$, on obtient bien $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

2. f étant de classe C^∞ sur $[0,1]$, elle y est en particulier de classe C^3, donc $f^{(3)}$ existe et est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée sur ce segment.

3.(a) Pour une fonction f de classe C^{p+1} sur un segment $[a,b]$, à valeurs réelles, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre p stipule que

$$\left| f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2}\, f''(a) - \cdots - \frac{(b-a)^p}{p!}\, f^{(p)}(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}\, M_{p+1}\,,$$

où $M_{p+1} = \max\limits_{[a,b]} |f^{(p+1)}|$.

Appliquée à l'ordre 2 à f sur le segment $\left[\frac{k}{n}, t\right]$, on obtient l'inégalité souhaitée.

3.(b) Il s'agit manifestement de $t \longmapsto \dfrac{1}{q+1}\left(t - \dfrac{k}{n}\right)^{q+1}$. On en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n}\right)^q dt \;=\; \frac{1}{(q+1)n^{q+1}} \tag{$\star$}$$

3.(c) On intègre l'inégalité de la question 3.(a) sur le segment $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt \;\leqslant\; \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3 dt \;\underset{(\star)}{=}\; \frac{M}{24n^4}\,.$$

On utilise alors la linéarité de l'intégrale, la relation $(\star)$ et l'inégalité triangulaire (pour les intégrales), pour écrire

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
\underset{(\star)}{=}\;& \left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right] dt\right| \\
\underset{\text{IT}}{\leqslant}\;& \frac{M}{24n^4}\,.
\end{aligned}$$

4. En utilisant la formule de Chasles, l'inégalité triangulaire (pour les sommes), et la majoration précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'')\right| \\
=\;& \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
=\;& \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\
\underset{\text{IT}}{\leqslant}\;& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{24n^4} \;=\; \frac{M}{24n^3}\,.
\end{aligned}$$

5. La suite (ε_n) est imposée, elle est nécessairement donnée par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \varepsilon_n \;=\; n^2 \left(S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') + \frac{1}{6n^2} S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\,dt\right),$$

et il s'agit de vérifier que cette suite tend bien vers 0, ce qui est le cas puisque la majoration de la question précédente s'écrit

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{n^2}\right| \;\leqslant\; \frac{M}{24n^3} \qquad \text{donc} \qquad |\varepsilon_n| \;\leqslant\; \frac{M}{24n}\,.$$

6. • La fonction f' vérifie les mêmes hypothèses que f (elle est de classe C^∞ sur $[0,1]$), donc on peut lui appliquer le résultat de la question précédente : il existe une suite (α_n) qui tend vers 0 et telle que

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad S_n(f') &= \int_0^1 f'(t)\,dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') - \frac{1}{6n^2} S_n(f^{(3)}) + \frac{\alpha_n}{n^2} \\ &= \int_0^1 f'(t)\,dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}\,,\end{aligned}$$

où on a posé $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \varepsilon'_n = -\dfrac{1}{6n} S_n(f^{(3)}) + \dfrac{\alpha_n}{n}$, et la suite (ε'_n) tend bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car la suite $\big(S_n(f^{(3)})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

• De même, on applique le résultat de la question précédente à f'' : il existe une suite (β_n) qui tend vers 0 et telle que

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad S_n(f'') &= \int_0^1 f''(t)\,dt - \frac{1}{2n} S_n(f^{(3)}) - \frac{1}{6n^2} S_n(f^{(4)}) + \frac{\beta_n}{n^2} \\ &= \int_0^1 f''(t)\,dt + \varepsilon''_n\,,\end{aligned}$$

où on a posé $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \varepsilon''_n = -\dfrac{1}{2n} S_n(f^{(3)}) - \dfrac{1}{6n^2} S_n(f^{(4)}) + \dfrac{\beta_n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $\big(S_n(f^{(3)})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(S_n(f^{(4)})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

7. On rassemble les résultats des questions 5 et 6 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}S_n(f) &= \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\left[\int_0^1 f'(t)\,dt - \frac{1}{2n}\left(\int_0^1 f''(t)\,dt + \varepsilon''_n\right) + \frac{\varepsilon'_n}{n}\right] - \frac{1}{6n^2}\left(\int_0^1 f''(t)\,dt + \varepsilon''_n\right) + \frac{\varepsilon_n}{n^2} \\ &= \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,dt + \left(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^2}\right)\int_0^1 f''(t)\,dt + \frac{\varepsilon''_n}{4n^2} - \frac{\varepsilon'_n}{2n^2} - \frac{\varepsilon''_n}{6n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2} \\ &= \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,dt + \frac{\delta_n}{n^2}\,,\end{aligned}$$

où on a posé $\delta_n = \dfrac{1}{12}\,\varepsilon''_n - \dfrac{1}{2}\,\varepsilon'_n + \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$

8.(a) Appliquons le développement asymptotique de $S_n(f)$ obtenu à la question précédente (*formule d'Euler Mac-Laurin*) à la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$, qui est bien de classe C^∞ sur $[0,1]$. On obtient l'existence d'une suite (α_n) de limite nulle et telle que

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad u_n \;=\; S_n(f) &= \int_0^1 \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2n}\big(f(1) - f(0)\big) + \frac{1}{12n^2}\big(f'(1) - f'(0)\big) + \frac{\alpha_n}{n^2} \\ &= \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}\,.\end{aligned}$$

8.(b) On en déduit immédiatement que $u_n - \ln 2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}\,.$

8.(c) D'après la relation de la question 1.(b) et le résultat de la question 8.(a), on a

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad v_n \;=\; u_{2n} - \frac{1}{2}\,u_n &= \ln 2 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} + \frac{\alpha_{2n}}{4n^2} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{64n^2} + \frac{\alpha_{2n} - 2\alpha_n}{4n^2}\,,\end{aligned}$$

d'où on tire l'équivalent $v_n - \dfrac{\ln 2}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{64n^2}$ car la suite de terme général $\alpha_{2n} - 2\alpha_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

8.(d) On a $\dfrac{v_n - \frac{\ln 2}{2}}{u_n - \ln 2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc si ça a un sens, on dira que (v_n) tend plus vite vers sa limite que (u_n) ne tend vers la sienne.
