Corrigé de la séance de révision n$^{\text{o}}$ 13

Partie I

1. G est le rang du premier succès dans une suite indépendantes d'épreuves de Bernoulli de paramètres p, donc $G \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. D'après le cours, $E(G) = \dfrac{1}{p}$ et $V(G) = \dfrac{q}{p^2}$.

2.(a) Pour tout $k \in [\![1, R]\!]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $X = X_1 + \cdots + X_R$.

2.(b) Par linéarité de l'espérance, on a $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{R} E(X_k) = \frac{R}{p}$.

Puisque les variables aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant R}$ sont deux à deux indépendantes, on a $V(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{R} V(X_k) = \frac{Rq}{p^2}$.

3.(a) Chaque variable aléatoire X_k étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $X = X_1 + \cdots + X_R$ est à valeurs dans $I = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, R-1\}$.
Toutes les valeurs de I sont bien atteintes par X : par exemple, si $\omega \in \Omega$ est tel que $X_1(\omega) = n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![2, R]\!]$, $X_k(\omega) = 1$, alors $X(\omega) = n + R - 1$, entier qui décrit I lorsque n décrit $\mathbb{N}^*$.

3.(b) D'après l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant R}$, on a

$$P\big(X_1 = x_1, \ldots, X_R = x_R\big) \;=\; \prod_{k=1}^{n} P(X_k = n_k) \;=\; \prod_{k=1}^{n} pq^{n_k - 1} \;=\; p^R q^{n_1 + \cdots + n_R - R} \;=\; p^R q^{n-R}.$$

3.(c) Notons $D = \big\{(x_1, \ldots, x_R) \in (\mathbb{N}^*)^R,\ x_1 + \cdots + x_R = n\big\}$ qui est un ensemble fini, car inclus dans $\{1, \ldots, n\}^R$.
L'événement $(X = n)$ s'écrit comme la réunion des ensembles disjoints $(X = n) \;=\; \displaystyle\bigcup_{(x_1, \ldots, x_R) \in D} (X_1 = x_1, \ldots, X_R = x_R)$, donc

$$P(X = n) \;=\; \sum_{(x_1, \ldots, x_R) \in D} P(X_1 = x_1, \ldots, X_R = x_R) \;=\; \sum_{(x_1, \ldots, x_R) \in D} p^R q^{n-R} \;=\; p^R q^{n-R} \times \mathrm{Card}(D),$$

et $\mathrm{Card}(D) = \alpha(R, n)$ est le nombre de solutions de l'équation (E).

4.(a) Un partage de S est la donnée de $R-1$ entiers $s_1, \ldots, s_{R-1}$ tels que $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{R-1} < n$, les R segments non réduits à un point étant alors $[0, s_1], [s_1, s_2], \cdots, [s_{R-1}, n]$.
Notons $D' = \big\{(s_1, \ldots, s_{R-1}) \in \mathbb{N}^{R-1},\ 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{R-1} < n\big\}$. Alors l'application

$$\varphi = \begin{pmatrix} D & \longrightarrow & D' \\ (x_1, \ldots, x_R) & \longmapsto & (s_1, \ldots, s_{R-1}) \end{pmatrix} \quad \text{où on a posé} \quad s_1 = x_1 \;;\; s_2 = x_1 + x_2 \;;\; \cdots \;;\; s_{R-1} = x_1 + \cdots + x_{R-1}$$

est une bijection de D sur D'.
En effet, elle est bien définie de D sur D' car pour tout $i \in \{0, \ldots, R-2\}$, $s_{i+1} - s_i = x_{i+1} > 0$, et $n - s_{R-1} = x_R > 0$.
De plus, l'application $\psi = \begin{pmatrix} D' & \longrightarrow & D \\ (s_1, \ldots, s_{R-1}) & \longmapsto & (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \ldots, s_{R-1} - s_{R-2}, n - s_{R-1}) \end{pmatrix}$ est bien définie de D' sur D et vérifie $\psi \circ \varphi = id_D$.

4.(b) On en déduit que $\alpha(R, n) = \mathrm{Card}(D) = \mathrm{Card}(D')$. Or un élément de D' est déterminé de manière unique par le choix de $R-1$ éléments distincts parmi $\{1, \ldots, n-1\}$, donc $\mathrm{Card}(D') = \dbinom{n-1}{R-1}$, et finalement

$$P(X = n) \;=\; \binom{n-1}{R-1} p^R q^{n-R}.$$

On a retrouvé la loi de Pascal de paramètres R et p.

Partie II

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(Y \leqslant n)$ s'écrit $\bigcap_{k=1}^{R}(X_k \leqslant n)$ donc par indépendance mutuelles des variables aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant R}$, on a

$$P(Y \leqslant n) \;=\; \prod_{k=1}^{R} P(X_k \leqslant n) \;=\; \prod_{k=1}^{R}\left(\sum_{i=1}^{n} P(X_k = i)\right) \;=\; \prod_{k=1}^{R}\left(\sum_{i=1}^{n} pq^{i-1}\right) \;=\; \prod_{k=1}^{R}\left(p\frac{1-q^n}{1-q}\right) \;=\; (1-q^n)^R\,.$$

La formule précédente reste valable pour $n = 0$ puisque $P(Y \leqslant 0) = 0$, car Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Puis on écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Y \leqslant n) \;=\; (Y \leqslant n-1) \cup (Y = n)$ et c'est une réunion d'événements incompatibles, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\quad P(Y = n) \;=\; P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1) \;=\; (1-q^n)^R - (1-q^{n-1})^R\,.$$

2.(a) Comme à la question précédente, on écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Z > n-1) = (Z = n) \cup (Z > n)$ et s'agissant d'événements incompatibles, il vient $v_{n-1} = u_n + v_n$ donc $u_n = v_{n-1} - v_n$.

2.(b) On en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} nu_n \;=\; \sum_{n=1}^{N} n(v_{n-1} - v_n) \;=\; \sum_{n=1}^{N} nv_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} nv_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1}(n+1)v_n - \sum_{n=\mathbf{0}}^{N} nv_n \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N\,.$$

Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la majoration $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} nu_n \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} v_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ (car $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 0$) prouve que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum nu_n$ sont majorées, donc cette dernière série est convergente.

2.(c) • La variable aléatoire Z étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente et de somme 1.

De plus, on a $(Z > N) = \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} (Z = n)$ et s'agissant d'événements incompatibles, on obtient

$$v_N \;=\; P(Z > N) \;=\; \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(Z = n) \;=\; \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\,,$$

ce qui est le reste d'ordre N de la série $\sum u_n$.

• On a, pour tout $n \geqslant N+1$, $0 \leqslant Nu_n \leqslant nu_n$, et si la série $\sum nu_n$ converge, on obtient en sommant

$$0 \;\leqslant\; Nv_N \;=\; \sum_{n=N+1}^{+\infty} Nu_n \;\leqslant\; \sum_{n=N+1}^{+\infty} nu_n\,.$$

• Dans ce cas, le reste d'ordre N de la série convergente $\sum nu_n$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, donc l'encadrement précédent prouve que $Nv_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

2.(d) Par définition, Z possède une espérance finie si et seulement si $\sum nP(Z = n) = \sum nu_n$ est absolument convergente, ce qui équivaut à dire qu'elle est convergente puisque c'est une série à termes positifs.

Or on a vu à la question 2.(b) que $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum nu_n$ converge.

Réciproquement, si $\sum nu_n$ converge, alors d'après 2.(b) et 2.(c), $\sum_{n=0}^{N-1} v_n = \sum_{n=1}^{N} nu_n + Nv_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} nu_n = E(Z)$, ce qui montre que la série $\sum v_n$ est convergente, et que sa somme vaut $E(Z)$.

3.(a) Constatons d'abord qu'en posant $Z = Y$, on a bien $v_n = P(Z > n) = P(Y > n) = 1 - P(Y \leqslant n) = 1 - (1-q^n)^R$.

D'après le développement limité à l'origine, $(1+u)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha u + \circ(u)$, on a

$$v_n \;=\; 1 - (1-q^n)^R \underset{0}{=} 1 - \big(1 - Rq^n + \circ(q^n)\big) \;=\; Rq^n + \circ(q^n)\,, \qquad \text{donc} \qquad v_n \underset{+\infty}{\sim} Rq^n\,.$$

D'après le critère d'équivalence pour les STP, la série $\sum v_n$ a la même nature que $\sum Rq^n$, qui est une série géométrique convergente puisque $q \in]0,1[$.

D'après la question précédente, ceci prouve que la variable aléatoire Y possède une espérance, et que $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

3.(b) Lorsque $R = 2$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - (1-q^n)^2 = 2q^n - q^{2n}$, donc

$$E(Y) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2q^n - q^{2n}\right) \;=\; \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} \;=\; \frac{1+2q}{1-q^2}\,.$$

4.(a) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 1-\left(1-e^{x\ln q}\right)^R$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = R(\ln q)e^{x\ln q}\left(1-e^{x\ln q}\right)^{R-1} \leqslant 0$ car $\ln q < 0$ et $1 - e^{x\ln q} \geqslant 0$. Ainsi, f décroît sur $\mathbb{R}_+$.

4.(b) Comme à la question 3.(a), on obtient $f(x) \underset{+\infty}{\sim} Rq^x = Re^{x\ln q}$ et s'agissant de fonctions positives, on conclut que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} Re^{x\ln q}\,dx$ ont même nature : convergente d'après le cours puisque $\ln q < 0$.

4.(c) On reconnaît dans le second membre la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - q^x \in [0, 1[$, donc

$$\sum_{k=0}^{R-1} q^x(1-q^x)^k \;=\; q^x\frac{1-(1-q^x)^R}{1-(1-q^x)} \;=\; 1-(1-q^x)^R \;=\; f(x)\,.$$

Or chacune des intégrales $\int_0^{+\infty} q^x(1-q^x)^k\,dx$ est convergente, d'après l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant q^x(1-q^x)^k \leqslant q^x = e^{x\ln q}$ et le fait que $x \mapsto q^x$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, comme on l'a déjà remarqué. On a de plus

$$\int_0^{+\infty} q^x(1-q^x)^k\,dx \underset{\left[\substack{u=1-q^x\\ du=-(\ln q)q^x\,dx}\right]}{=} \int_0^1 \frac{-u^k\,du}{\ln q} \;=\; \frac{-1}{\ln q}\left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \;=\; \frac{-1}{(k+1)\ln q}\,.$$

On pouvait aussi reconnaître le motif $u' \times u^k$ à un facteur près. On en déduit, par linéarité de l'intégrale, que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \sum_{k=0}^{R-1}\int_0^{+\infty} q^x(1-q^x)^k\,dx \;=\; -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{1}{k+1}\,.$$

5.(a) C'est immédiat, puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $v_n = f(n)$.

5.(b) On intègre l'encadrement précédent sur le segment $[n, n+1]$, ce qui donne $v_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant v_n$, puis on somme l'inégalité $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant v_n$ pour $n \in [\![0, N]\!]$ et l'inégalité $v_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ pour $n \in [\![0, N-1]\!]$, d'où

$$\int_0^{N+1} f(x)\,dx \;\leqslant\; \sum_{n=0}^{N} v_n \;\leqslant\; \int_0^N f(x)\,dx + v_0 \;=\; \int_0^N f(x)\,dx + 1\,,$$

car $v_0 = 1$.

5.(c) On peut faire tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, car les trois termes possèdent une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$, et l'encadrement souhaité en découle après un changement d'indice évident sur la somme.

6. On intègre l'inégalité $\forall x \in [k, k+1]\,,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ sur le segment $[k, k+1]$, puis on somme les encadrements obtenus pour k variant de 1 à R, et on obtient l'encadrement souhaité comme à la question 5.(b).

On a donc $\ln(R+1) \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{R}\frac{1}{k} \;\leqslant\; 1 + \ln R$, d'où

$$-\frac{\ln(R+1)}{\ln q} \;\leqslant\; E(Y) \;\leqslant\; -\frac{1+\ln R}{\ln q} + 1 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\ln(R+1)}{\ln R} \;\leqslant\; -\frac{\ln q}{\ln R}E(Y) \;\leqslant\; \frac{1+\ln R}{\ln R} - \frac{\ln q}{\ln R}\,,$$

Lorsque R tend vers l'infini, les deux bornes tendent vers 1 (par exemple en écrivant $\ln(R+1) = \ln R + \ln(1+\frac{1}{R})$) , donc le théorème des gendarmes montre que $-\frac{\ln q}{\ln R}E(Y) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 1$, ce qui signifie que $E(Y) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln R}{\ln q}$.

Partie III

1. Z_n est le nombre de rosiers dont la greffe a pris pendant la $(n+1)^{\text{e}}$ semaine.

2 Y_1 est le nombre de succès dans une suite de R épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, donc $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. D'après le cours, $E(Y_1) = np$ et $V(Y_1) = npq$.

3.(a) La variable aléatoire Y_n est à valeurs dans $\{0,\dots,R\}$, donc la famille $\big((Y_n = m)_{0\leqslant m\leqslant R}\big)$ est un système complet d'événements, et par conséquent d'après la formule des probabilités totales, $P(Y_{n+1} = \ell) = \displaystyle\sum_{m=0}^{R} P\big((Y_{n+1} = \ell) \cap (Y_n = m)\big)$.

Or si $m > \ell$, on a $(Y_{n+1} = \ell) \cap (Y_n = m) = \varnothing$ et si $0 \leqslant m \leqslant \ell$, on a $(Y_{n+1} = \ell) \cap (Y_n = m) = (Z_n = \ell - m) \cap (Y_n = m)$.

On a donc

$$\forall \ell \in [\![0,R]\!]\,,\quad P(Y_{n+1} = \ell) \;=\; \sum_{m=0}^{\ell} P\big((Z_n = \ell - m) \cap (Y_n = m)\big) \;=\; \sum_{m=0}^{\ell} P\big(Z_n = \ell - m \,|\, Y_n = m\big) \times P(Y_n = m)\,.$$

3.(b) Si $Y_n = m$, il reste à l'issue de la n^{e} semaine $R-m$ rosiers non greffés, et on retente une greffe sur chacun de ces rosiers. On obtient a nouveau un schéma binomial : la loi de Z_n sachant $Y_n = m$ est la loi binomial $\mathcal{B}(R-m,p)$, indépendante de n.

4.(a) On a d'après $(\star)$, $\forall \ell \in [\![0,R]\!]$, $P(Y_2 = \ell) \;=\; \displaystyle\sum_{m=0}^{\ell} P(Z_1 = \ell - m \,|\, Y_1 = m)P(Y_1 = m)$, avec, d'après ce qui précède,

$$P(Y_1 = m) = \binom{R}{m} p^m q^{R-m} \qquad \text{et} \qquad P(Z_1 = \ell - m \,|\, Y_1 = m) = \binom{R-m}{\ell-m} p^{\ell-m} q^{R-\ell}\,,$$

d'où la formule donnée par l'énoncé.

4.(b) Tous les coefficients binomiaux écrits ont un sens, et on a

$$\binom{R}{m}\binom{R-m}{\ell-m} \;=\; \frac{R!}{m!(R-m)!} \times \frac{(R-m)!}{(\ell-m)!(R-\ell)!} \;=\; \frac{R!}{(R-\ell)!} \times \frac{1}{m!(\ell-m)!} \times \frac{\ell!}{\ell!} \;=\; \binom{R}{\ell}\binom{\ell}{m}.$$

4.(c) D'après les deux questions précédentes, on a

$$\begin{aligned} P(Y_2 = \ell) \;&=\; \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R-m}{\ell-m} p^{\ell-m} q^{R-\ell} \binom{R}{m} p^m q^{R-m} \;=\; \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R}{\ell}\binom{\ell}{m} p^{\ell} q^{2R-\ell-m} \\ &=\; \binom{R}{\ell} p^{\ell} q^{2R-2\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} q^{\ell-m} \;=\; \binom{R}{\ell} p^{\ell} q^{2R-2\ell} (1+q)^{\ell} \quad \text{(formule du binôme)} \end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée.

La variable Y_2 est à valeurs dans $[\![0,R]\!]$ et $\forall \ell \in [\![0,R]\!]$, $P(Y_2 = \ell) = \displaystyle\binom{R}{\ell} x^{\ell}(1-x)^{R-\ell}$, on a posé $x = 1 - q^2 = p(1+q)$, donc Y_2 suit la loi binomiale de paramètres R et $1 - q^2$.

5. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, on a déjà prouvé que Y_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(R,q) = \mathcal{B}(R,1-q)$. Supposons que Y_n suive la loi $\mathcal{B}(R, 1-q^n)$ et montrons, grâce à la relation $(\star)$, que Y_{n+1} suit la loi $\mathcal{B}(R, 1-q^{n+1})$.

Y_{n+1} est à valeurs dans $[\![0,R]\!]$ et, pour tout $\ell \in [\![0,R]\!]$,

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = \ell) \;&=\; \sum_{m=0}^{\ell} P(Z_n = \ell - m \,|\, Y_n = m)P(Y_n = m) \underset{\text{H.R.}}{=} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R-m}{\ell-m} p^{\ell-m} q^{R-\ell} \times \binom{R}{m} (1-q^n)^m q^{n(R-m)} \\ &=\; \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R}{\ell}\binom{\ell}{m} (1-q^n)^m p^{\ell-m} q^{R-\ell+n(R-m)} \;=\; \binom{R}{\ell} q^{(n+1)(R-\ell)} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (1-q^n)^m p^{\ell-m} q^{n(\ell-m)} \\ &=\; \binom{R}{\ell} q^{(n+1)(R-\ell)} \big(1 - q^n + pq^n\big)^{\ell} \;=\; \binom{R}{\ell} \big(1 - q^{n+1}\big)^{\ell} (q^{n+1})^{R-\ell}\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $Y_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(R, 1-q^{n+1})$.

Remarque : le résultat obtenu peut se démontrer directement et beaucoup plus facilement : chaque rosier a une probabilité q de ne pas être greffé chaque semaine, donc la probabilité q^n de ne pas être greffé à l'issue de la n^{e} semaine, donc la probabilité $1-q^n$ d'être greffé à l'issue de la n^{e} semaine.

Y_n représente le nombre de succès lors de R épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètres $1-q^n$, donc $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(R, 1-q^n)$.

6. On a

$$\forall\, k \in [\![0, R]\!]\,,\ P(Y_n = k) = \binom{R}{k}\big(1-q^n\big)^k (q^n)^{R-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant R-1 \\ 1 & \text{si } k = R \end{cases}$$

ce qui est conforme à l'intuition : tous les rosiers finissent presque sûrement par être greffés.
